

Problème 1 de l'examen intra 1

Problème 1.

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n$ une série entière dont le rayon de convergence est $0 < R < \infty$ et telle que $a_n \neq 0$ pour tout n sauf peut-être un nombre fini de n .

Montrer que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \leq R \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

et en déduire que

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

si la limite existe.

Remarques.

- *Ne pas utiliser la formule de Cauchy-Hadamard dans la démonstration; par contre, il est une très bonne idée de revoir la démonstration de la formule.*