Problème 1 de l'examen intra 2

Problème 1.

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ qui contient le disque *fermé* $\overline{D(0,r)}$ de centre 0 et rayon r. Pour tout $z \in D(0,r)$, on définit

$$C_z = \sup_{\omega \in C(0,r)} \frac{r}{\left|\omega - z\right|},$$

où $C(0,r)$ est le cercle de centre 0 et rayon r.

a. Soit f une fonction holomorphe sur U. Montrer que

$$\left|f(z)\right| \leq C_z\, N_f \qquad \text{pour tout } z \in D(0,r),$$

où

$$N_f = \sup_{\omega \in C(0,r)} \left|f(\omega)\right|.$$

b. Montrer que si f est une fonction holomorphe sur U, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$,

$$\left|f(z)\right|^k \leq C_z\, N_f^k \qquad \text{pour tout } z \in D(0,r).$$

c. Montrer que si f est une fonction holomorphe sur U, alors

$$|f(z)| \leq N_f \qquad \text{pour tout } z \in D(0,r).$$

d. Soit f une fonction holomorphe sur U tel que $|f|$ est constante sur $C(0,r)$. Montrer que soit f est constante sur U ou soit f possède au moins un zéro dans $D(0,r)$.

Indice: Montrer que $|f|$ est constant sur $D(0,r)$; on peut utiliser le fait (sans preuve) que si $|f|$ est constant sur $D(0,r)$, alors f est constante sur $D(0,r)$.