Feuille d'exercices 1

Exercice 1. (Sur la conguaison complexe.) Soit $z = a + ib, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

a. $\text{Ré}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$

b. $\text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

c. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

d. $\tan(\arg(z)) = \frac{\text{Im}(z)}{\text{Ré}(z)}$

e. $z\overline{z} = |z|^2$

f. $|\overline{z}| = |z|$

g. $\overline{\overline{z}} = z$

h. $\frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

i. Si $|z| = 1$, alors $\frac{1}{z} = \overline{z}$.

j. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

k. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$

l. $\overline{z_1/z_2} = \overline{z}_1/\overline{z}_2$

Exercice 2. (Inégalité triangulaire.) Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

a. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

b. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

c. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ssi z_1 et z_2 sont colinéaires.

d. (Inégalité triangulaire généralisée) Soit $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Alors,

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

avec égalité ssi $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont colinéaires.

Exercice 3. (Méthode de Tartaglia–Cardano pour résoudre les cubiques.)

a. Montrer que le point d'inflexion de la cubique $X^3 + AX^2 + BX + C = 0$ est $X = -\frac{A}{3}$.

b. En déduire que la substitution $X = x - \frac{a}{3}$ transforme la cubique ci-dessus en une cubique de la forme

$$x^3 - 3px - 2q = 0.$$

c. Faire la substitution $x = s + t$ et montrer que x est une solution de la cubique ssi

$$st = p \qquad \text{et} \qquad s^3 + t^3 = 2q.$$

d. À l'aide des deux équations $st = p$ et $s^3 + t^3 = 2q$, montrer que

$$s^6 - 2qs^3 + p^3 = 0 \qquad \text{et} \qquad t^6 - 2qt^3 + p^3 = 0.$$

e. Noter que $s^6 - 2qs^3 + p^3 = 0$ est une équation polynomiale de degré 2 de la variable s^3. Résoudre l'équation pour s^3.

f. Résoudre l'équation $t^6 - 2qt^3 + p^3 = 0$ pour t^3.

g. À l'aide de l'équation $s^3 + t^3 = 2q$, montrer que

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt[2]{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt[2]{q^2 - p^3}}$$

est une solution de la cubique $x^3 - 3px - 2q = 0$.

h. Trouver les trois solutions de $x^3 = 18x + 35$.

Exercice 4. Soit $p(z)$ un polynôme à coefficients réels.

a. Montrer que $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$ pour tous $z \in \mathbb{C}$.

b. Montrer que si z est un racine de $p(z)$, alors $\overline{z}$ est aussi une racine de $p(z)$.

Exercice 5. Soient a, b et c trois points distincts qui appartiennent au cercle unité et qui satisfont $a + b + c = 0$. Montrer que a, b et c sont les sommets d'une triangle équilatéral.

Exercice 6. Dessiner des carrés sur les côtés d'un quadrilatère (voir la figure ci-dessous). Montrer que les segments reliant les centres des carrés opposés sont :

a. de même longueur ;

b. et orthogonaux.