Feuille d'exercices 10

Équations de Cauchy–Riemann

Exercice 1. Soit $f(x+iy) = x^2 + ixy^3$. Existe-t-il un ouvert non-vide U de $\mathbb{C}$ tel que f est holomorphe sur U ?

Exercice 2. Montrer que les fonctions holomorphes de la forme

$$f(x+iy) = u(x) + iv(y)$$

où u et v sont des fonctions à valeurs réelles, sont de la forme $f(z) = \lambda z + c$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{C}$.

Calcul des intégrales

Exercice 3. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2e^{it})}{2 - ie^{-it}}\, dt = \frac{i\pi e}{2} - \frac{i\pi}{2e}.$$

Exercice 4. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^2 e^{2it}}{re^{it} - z}\, dt = 2\pi z \qquad \text{et} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\pi e^{2it}}{\pi e^{it} - z}\, dt = 2z.$$

Théorème de Cauchy (et conséquences)

Exercice 5. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{6} + 2e^{it}\right) dt.$$

Exercice 6. Soit f une fonction analytique sur le disque de centre 0 et rayon 1 tel que

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|} \qquad \text{pour tout } |z| < 1.$$

Montrer que

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq (n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < (n+1)e.$$

Exercice 7. Soit α un nombre réel. Montrer que $|e^{i2\alpha\pi} - 1| \leq 2\pi|\alpha|$. (*Piste : Intégrer $e^{i\alpha t}$.*)

Théorème de Liouville

Exercice 8. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $|f(z)| \geq 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

Exercice 9. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. S'il existe un réel M tel que $|f(z)| \leq M|z|$, alors f est linéaire (c'est-à-dire, f est de la forme $f(z) = \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$).