Feuille d'exercices 11

Principe du module maximum

Exercice 1. Soit f une fonction entière telle que $f(0) = 3 + 4i$ et $|f(z)| \leq 5$ pour $|z| < 1$. Calculer $f'(0)$.

Exercice 2. (Principe du module minimum) Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U telle que la fonction $|f| : U \to \mathbb{R}$ admet un minimum local en $z_0 \in U$. Montrer que

a. soit $f(z_0) = 0$;

b. soit f est constante sur U.

Exercice 3. En utilisant le principe du module minimum, montrer que tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{C}$ possède une racine.

Exercice 4. Soit U un ouvert borné et connexe de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction analytique sur U, continue sur $\overline{U}$, qui ne s'annule pas sur U et qui est constante sur le borde de U. Montrer que f est constante sur U.

Exercice 5. Soit U un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$. Soit f et g deux fonctions définies et continues sur $\overline{U}$ et holomorphe sur U. Montrer que si f et g coincident sur la frontière de U, alors f et g coincident sur $\overline{U}$.

Exercice 6. Soit f une fonction entière. Montrer que si $\operatorname{Im} f \leq 0$, alors f est constante.

Intégrales curvilignes

Exercice 7. Évaluer l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$, où $f(x+iy) = x^2 + y + xyi$, de 0 à $1+i$ le long les chemins suivants :

a. $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ où $\gamma(t) = t$

b. $\gamma : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{C}$ où $\gamma(t) = 2t$ (comparer avec la partie précédente)

c. $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ où $\gamma(t) = 1 + it$

d. $\gamma : [\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{C}$ où $\gamma(t) = 1 + i(2t-1)$ (comparer avec la partie précédente)

e. $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ où $\gamma(t) = t + it^2$

f. $\gamma : [-1,0] \to \mathbb{C}$ où $\gamma(t) = (1+t) + i(t^2 + 2t + 1)$ (comparer avec la partie précédente)

Homotopies

Exercice 8. Soit

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \Gamma(t,s) & = & e^{i\pi t} + s\left(e^{-i\pi t} - e^{i\pi t}\right) \end{array}$$

Dessiner les chemins $\Gamma(t,0)$, $\Gamma(t,1)$, $\Gamma(0,s)$, $\Gamma(1,s)$.

Exercice 9. Soit

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \Gamma(t,s) & = & (1-t)\left(z_0 + r_0 e^{2\pi i s}\right) + t\left(z_1 + r_1 e^{2\pi i s}\right) \end{array}$$

Dessiner les chemins $\Gamma(t,0)$, $\Gamma(t,1)$, $\Gamma(0,s)$, $\Gamma(1,s)$.

Exercice 10. Soit A, B, C trois points du plan complexe. Trouver une homotopie entre le segment $[A,C]$ et le chemin comprenant les segments $[A,B]$ et $[B,C]$.