Feuille d'exercices 12

Intégrales curvilignes et homotopies

Exercice 1. Dessiner les chemins suivants et évaluer les intégrales. *(Il est possible d'évaluer chaque intégrale sans un calcul explicite.)*

a. $\displaystyle\int_\alpha z\,dz$, où $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est le chemin $\alpha(t) = \cos(t) + 2i\sin(t)$.

b. $\displaystyle\int_\beta \frac{1}{z^2}\,dz$, où $\beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est le chemin $\beta(t) = \cos(t) + 2i\sin(t)$.

c. $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz$, où $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est le chemin $\gamma(t) = 2 + e^{it}$.

d. $\displaystyle\int_\delta \frac{1}{z^2-1}\,dz$, où δ est le cercle de centre 1 et rayon $\frac{1}{2}$.

Exercice 2. Soit f est un fonction analytique sur un ouvert U contenant un lacet simple γ et son intérieur. Supposons z_0 n'appartient pas au chemin γ. Montrer que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{z-z_0}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz.$$

Problème de primitives

Exercice 3. Pour chaque fonction suivante trouver une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$ si elle existe ; sinon, expliquer pourquoi une telle primitive n'existe pas.

a. $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)}$ *b.* $g(z) = \dfrac{1}{z^2(z+1)^2}$ *c.* $h(z) = \dfrac{2z+1}{z^2(z+1)^2}$

Séries de Laurent

Exercice 4. Trouver les développements en séries de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)(2-z)}$$

sur les anneaux suivants.

a. $0 < |z| < 1$ *b.* $1 < |z| < 2$ *c.* $2 < |z|$

Indice: Noter que l'on peut exprimer $f(z)$ en termes des séries géométriques :

$$f(z) = \frac{1}{2z} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2\,(z-2)}.$$