

Feuille d'exercices 13

Théorème des résidus

Exercice 1.

Soit $r > 1$ et γ le segment de $-r$ à r composé avec le demi-cercle $re^{\pi t}$ pour $t \in [0, 1]$.

- a. Calculer le résidu de $\frac{1}{z^2 + 1}$ en i .
- b. Calculer l'indice de i par rapport à γ .
- c. Évaluer l'intégrale

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 1} dz.$$

(Solutions : $-\frac{i}{2}$; 1 ; π .)

Exercice 2.

Soit $r > 2$ et γ le segment de $-r$ à r composé avec le demi-cercle $re^{\pi t}$ pour $t \in [0, 1]$, et

$$f(z) = \frac{2z^2 - 1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}.$$

- a. Calculer les résidus de $f(z)$ en i et en $2i$.
- b. Calculer l'indice de i et $2i$ par rapport à γ .
- c. Évaluer l'intégrale

$$\int_{\gamma} \frac{2z^2 - 1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz.$$

- d. En déduire que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Indice: Utiliser l'estimation standard pour montrer que l'intégrale de $f(z)$ le long le demi-cercle $re^{\pi t}$ pour $t \in [0, 1]$ converge vers 0 quand $r \rightarrow \infty$.

(Solutions : $\frac{i}{2}$ et $-\frac{3i}{4}$; 1 et 1 ; $\frac{\pi}{2}$.)

Exercice 3.

Soit γ le segment de $-r$ à r composé avec le demi-cercle $re^{\pi t}$ pour $t \in [0, 1]$. Évaluer

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} dz.$$

(Solution : $\frac{\pi}{e}$.)