Feuille d'exercices 2

Topologie de $\mathbb{C}$

Exercice 1. *(Sur les ouverts)* Un sous-ensemble $U \subseteq \mathbb{C}$ est un *ouvert* si pour tout $z \in U$ il existe un disque ouvert centré en z qui est completement inclus dans U. Montrer les énoncés suivants.

a. $\mathbb{C}$ est un ouvert.

b. L'ensemble vide $\emptyset$ est un ouvert.

c. L'intersection de deux ouverts est un ouvert.

d. L'intersection d'une famille *finie* d'ouverts est un ouvert.

e. La réunion de deux ouverts est un ouvert.

f. La réunion d'une famille (pas nécessairement finie) d'ouverts est un ouvert.

Exercice 2. *(Sur les fermés)* Un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ est un *fermé* si son complémentaire dans $\mathbb{C}$ est un ouvert. Pour chaque énoncé dans l'exercice précédent, formuler l'énoncé corrsepondant pour les fermés de $\mathbb{C}$.

Exercice 3. *(Sur les voisinages)* Soit $z \in \mathbb{C}$. Un *voisinage* de z est une partie de $\mathbb{C}$ qui contient un ouvert qui comprend z. Montrer les énoncés suivants.

a. $\mathbb{C}$ est un voisinage de z.

b. Tout voisinage de z contient z.

c. Tout sur-ensemble d'un voisinage de z est un voisinage de z.

d. L'intersection de deux voisinages de z est un voisinage de z.

e. Pout tout voisinage V de z, il existe un voisinage W de z tel que V soit voisinage de chacun des points de W.

Exercice 4. *(Sur les adhérences)* Soit $X, Y \subseteq \mathbb{C}$. L'*adhérence* de X, noté $\overline{X}$, est le plus petit fermé qui contient X. Montrer les énoncés suivants.

a. $X \subseteq \overline{X}$.

b. $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

c. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

d. $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$.

e. $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

f. X est fermé ssi $\overline{X} = X$.

g. $(\mathbb{C} \setminus X)^\circ = \mathbb{C} \setminus \overline{X}$.

Exercice 5. *(Sur les intérieurs)* Soit $X \subseteq \mathbb{C}$. L'*intérieur* de X, noté X°, est le plus grand ouvert qui est contenu dans X.

a. Montrer que $\mathbb{C} \setminus \overline{X} = (\mathbb{C} \setminus X)^\circ$.

b. Pour chaque énoncé dans l'exercice précédent, formuler l'énoncé corrsepondant pour l'intérieur d'une partie de $\mathbb{C}$.

Suites et limites

Exercice 6. Déterminer si les suites suivantes sont convergentes ou divergentes ; si la suite est convergente, trouver sa limite.

a. $\left\{\dfrac{\sqrt{n}+i(n+1)}{n}\right\}$ *b.* $\left\{\left(\dfrac{1}{1+i}\right)^n\right\}$ *c.* $\left\{\sqrt{n^2-i\,n}-n\right\}$ *d.* $\left\{n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right\}$

Exercice 7. *(Sur les limites et points adhérents)* Soit $X \subseteq \mathbb{C}$.

a. Montrer que la limite d'une suite d'éléments de X est un point adhérent à X.

b. Montrer que tout point adhérent à X est limite d'une suite d'éléments de X.

c. En déduire que X est fermé ssi la limite de toute suite d'éléments de X est dans X.

Exercice 8. Si $z \in \mathbb{C}$ est un point d'accumulation d'une suite $\{z_n\}$ de nombres complexes (en tant qu'ensemble), alors il existe une sous-suite de la suite $\{z_n\}$ qui converge vers z.

Exercice 9. Soit S une partie de $\mathbb{C}$. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents.

a. S est compact (c'est-à-dire, S est fermé et borné).

b. Tous sous-ensembles infini de S possède un point d'accumulation dans S.

c. Toute suite dans S contient une sous-suite convergente dont la limite appartient à S.