Feuille d'exercices 3

Séries

Exercice 1. Déterminer si les séries convergent ou divergent.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{3}\right)^n$ *b.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ (pour $|z|\leq 1$). *c.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ ($z\in\mathbb{C}$).

Limites de fonctions

Exercice 2. Soit g une fonction complexe tel que $\lim_{z\to z_0} g(z) = B \neq 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$|g(z)| > \frac{|B|}{2} \qquad \text{pour } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Norme infinie

Exercice 3. Soit f une fonction complexe définie sur une partie S de $\mathbb{C}$. La *norme infinie* de f est

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in S}\{|f(z)|\}\,.$$

Montrer que la norme infinie vérifie les conditions suivantes.

a. (séparation) $\|f\|_\infty = 0$ ssi $f = 0$.

b. (homogénéité) Si $z \in \mathbb{C}$, alors $\|zf\|_\infty = |z|\ \|f\|_\infty$.

c. (inégalité triangulaire) Pour tout $f, g : S \to \mathbb{C}$, on a que

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\,,$$
$$\|f-g\|_\infty \geq \big|\, \|f\|_\infty - \|g\|_\infty \big| \geq \|f\|_\infty - \|g\|_\infty\,.$$

Exercice 4. Une *distance* sur un ensemble E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes.

a. (symétrie) $d(a, b) = d(b, a)$ pour tout $a, b \in E$.

b. (séparation) $d(a, b) = 0$ ssi $a = b$.

c. (inégalité triangulaire) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

Montrer que

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty$$

est une distance sur l'ensemble de fonctions bornées $f : S \to \mathbb{C}$.

Suites de fonctions

Exercice 5. Montrer que la suite de fonctions $\left\{\frac{1}{nz^2}\right\}$ converge absolument vers la function nulle sur $S = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \frac{1}{17}\right\}$.

Exercice 6. Montrer que la suite de fonctions $\left\{\frac{1}{1+nz^2}\right\}$ converge absolument vers la function nulle sur $S = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \frac{1}{17}\right\}$.