Feuille d'exercices 4

Séries de fonctions (convergence normale et uniforme)

Exercice 1. Étudier la démonstration du théorème (voir le fichier sur le site web du cours) :

Une suite de fonctions vérifie le critère de Cauchy ssi elle converge uniformément.

Formuler deux questions concernant la démonstration ou l'énoncé du théorème à poser au professeur ou au démonstrateur.

Exercice 2. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ une série de fonctions sur X. On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ vérifie le *critère de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_{n+1} + f_{n+2} + \cdots + f_m\|_\infty < \varepsilon \qquad \text{si } n, m \geq N \text{ et } n < m.$$

Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ vérifie le critère de Cauchy ssi elle converge uniformément.

Exercice 3. En classe, nous avons vu une esquisse de la démonstration de la proposition :

Toute série de fonctions normalement convergente sur $X \subseteq \mathbb{C}$ est absolument convergente et uniformément convergente sur X.

a. Fournir tous les détails de la démonstration. *(Indice : critère de Cauchy)*

b. Montrer que la réciproque de la proposition est fausse en donnant un contre-exemple ainsi que tous les détails de la justification.

Exercice 4. *(Inversion de la sommation et du passage à la limite)* Soit $w \in \mathbb{C}$ et $\{f_n\}$ une suite de fonctions telle que $\lim_{z\to w} f_n(z)$ converge pour tout n. Posons

$$a_n = \lim_{z\to w} f_n(z).$$

Montrer que si la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement, alors la série de nombres complexes $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{z\to w} f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{z\to w} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z).$$

Exercice 5. Montrer que la somme d'une série de fonctions uniformément convergentes de fonctions continues est continue.

Tests de convergence

Exercice 6. Montrer qu'une série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ sur X est normalement convergente sur X ssi il existe une série $\sum_{n=0}^{\infty} r_n$ convergente de nombres réels positifs ou nuls telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a que $\sup_{w\in X}\{|f_n(w)|\} = \|f_n\|_\infty \leq r_n$.

Exercice 7. *(Test de Abel)* Soient a_n et b_n des nombres *réels*. Supposons qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ et une constante $M \in \mathbb{R}$ qui vérifient les conditions suivantes :

(1) $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout $n \geq N$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

(3) $\left|b_N + b_{N+1} + b_{N+2} + \cdots + b_n\right| \leq M$ pour tout $n \geq N$.

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Rayon de convergence d'une série entière

Exercice 8. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière qui converge en $w = 1 + i\sqrt{3}$ mais pas absolument. Déterminer le rayon de convergence de la série.

Exercice 9. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est absolument convergente pour un point sur son cercle de convergence, alors elle converge pour chaque point sur son cercle de convergence.

Exercice 10. Déterminer les rayons de convergences des séries entières suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{8^n+1}(z-5)^{2n}$

c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} z^n$

d. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$

Exercice 11. Trouver le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n z^n$$