Feuille d'exercices 5

Rayon de convergence

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{7n^4+2n^3}{5n^4+23n^3}\right)^n z^n$

b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{c^n}z^{2n}$, où $c\in\mathbb{C}$, $c\neq 0$

c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{2^n(2n)!}(z-1)^n$

d. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+c^n\right)z^n$, où $c\in\mathbb{C}$

e. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^k}{(kn)!}z^n$, où $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 1$

f. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sin(n)z^n$

Exercice 2. Soit $0<R<\infty$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes en fonction de R.

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{2n}$ *b.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2 z^n$ *c.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2 z^{2n}$ *d.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n$

Exercice 3. Soit $R_a>0$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ et $R_b>0$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$.

a. Si R est le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$, montrer que $R\geq\min\{R_a,R_b\}$, avec égalité ssi $R_a\neq R_b$.

b. Si R est le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_n)z^n$, montrer que $R\geq R_a R_b$.

c. Si $a_n\neq 0$ pour tout n et R est le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n}z^n$, montrer que $R\leq\frac{1}{R_a}$.

Exercice 4. Montrer que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}z^n$ est de rayon de convergence 1 et que la fonction $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}z^n$ est injective dans $\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq\frac{2}{3}\}$.

Indication : $z^n-w^n=(z-w)\left(z^{n-1}+z^{n-2}w+\cdots+zw^{n-2}+w^{n-1}\right)$

Fonctions analytiques

Exercice 5. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n!}\right)z^n=(z-1)\exp(z)+1$.

Exercice 6. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n!}\right)z^n=(z^2+z)\exp(z)$.

Exercice 7. Vrai ou Faux : $|\cos(z)|\leq 1$ et $|\sin(z)|\leq 1$ pour tout $z\in\mathbb{C}$?

Exercice 8. Montrer que la fonction $f(z)=\frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.