Feuille d'exercices 7

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe U et soit $z_0 \in U$. Si les n-ième dérivées de f et g coincident en z_0 pour tout entier $n \geq 0$, montrer que $f(z) = g(z)$ pour tout z de U.

Exercice 2. Montrer que sin et cos atteignent tout valeur $c \in \mathbb{C}$ (dénombrable souvent).

Exercice 3. Déterminer les parties réelles et imaginaires des fonctions :

a. $\exp(z^2)$

b. $\exp(\exp(z))$

Exercice 4. Soit
$$f(z) = z - \frac{z^3}{3^3} + \frac{z^5}{5^3} - \frac{z^7}{7^3} + \cdots .$$
Montrer que la série entière pour $f'(z)$ converge en $z = i$, mais que la série entière pour $f''(z)$ ne converge pas en $z = i$. En deduire le rayon de convergence de $f(z)$.

Exercice 5. Calculer le rayon de convergence du développement taylorien en 0 de la fonction
$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+3} = \frac{5}{(z+3)(z-2)}.$$
Deduire le même pour la fonction $z^2 e^z f(z)$.

Exercice 6. Soit
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}.$$
Déterminer le rayon de convergence de la série et montrer que $f''(z) = f(z)$.

Exercice 7. Calculer la somme de la série pour $|z| < 1$:
$$1 + 4z + 9z^2 + 16z^3 + 25z^4 + \cdots + n^2 z^{n-1} + \cdots .$$

Exercice 8. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Supposer qu'il il existe un point $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $|f(z) - z_0| > \varepsilon$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est constante. En déduire que l'image d'une fonction non-constante holomorphe sur $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathbb{C}$.