Feuille d'exercices 8

Exercice 1. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$.

a. Déterminer le rayon de convergence de la série.

b. Montrer que $f''(z) = f(z)$.

Exercice 2.

a. Soit $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $z = e^w$. Écrivez $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $w = u + iv$ avec $u, v \in \mathbb{R}$. Montrer que $u = \log r$ et $v = \theta + 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

b. Déterminer toutes les valeurs possible de $\log(1-i)$.

Exercice 3. Exprimer les fonctions suivantes sous la forme $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, où u et v sont des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

a. $f(z) = z + iz^2$ *b.* $f(z) = \frac{1}{z}$ *c.* $f(z) = \frac{\overline{z}}{z}$

Exercice 4. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont holomorphes sur $\mathbb{C}$?

a. $x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

b. $x\sin(x) + iy\sin(x)$

c. $e^y \sin(x) - ie^y \cos(x)$

d. $x^3 + y^2x + x^2 - y^2 + i(x^3 + y^2x + x^2 - y^2)$

Exercice 5. Trouver toutes les fonctions holomorphes $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que :

$$\text{Ré}\,(f(x+iy)) = 2xy$$

Exercice 6. Soit f une fonction définie sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ et soit $\overline{f}$ la fonction définie par $\overline{f}(z) = \overline{f(z)}$ pour tout $z \in U$. Si f est $\overline{f}$ sont holomorphes, alors f est constante.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction complexe définie par

$$f(x+iy) = x^3y^2 + ix^2y^3.$$

a. Trouver tous les points où la fonction f est dérivable (au sens complexe).

b. Est-ce que la fonction f est holomorphe en ces points ?