Feuille d'exercices 9

Équations de Cauchy–Riemann

Exercice 1. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$. Si $\mathrm{Im}(f(z)) = 0$ pour $z \in U$, alors f constante sur U.

Exercice 2. Existe-il une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ tel que

$$f(x+iy) = (x^2+y^2) + iv(x,y)\,?$$

Exercice 3. Soit $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ une fonction analytique sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ tel que $2\,u(x,y) - 3\,v(x,y) = 17$ pour tout $x+iy \in U$. Montrer que f est constante.

Exercice 4. Soit $u(x,y) = 2x(1-y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

a. Trouver une fonction v tel que $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ soit une fonction analytique.

b. Exprimer f en termes de la variable z.

Exercice 5. Soit $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction holomorphe qui vérifie

$$\mathrm{Im}(f'(x+iy)) = 6x(2y-1) \qquad \text{et} \qquad f(0) = 3-2i.$$

Calculer $f(1+i)$.

Exercice 6. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Déterminer toutes les fonctions holomorphes $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ qui vérifient $v(x,y) = u(x,y)^2$ pour tout $x+iy \in U$.

Théorème intégral de Cauchy

Exercice 7. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Quel est le rayon de convergence de son développement taylorien en 0 ?

Exercice 8. Soit f une fonction analytique tel que $f(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots$ pour $|z| < 1$. Soit $\{a_n\}$ la suite des nombres complexes telle que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+2)^n.$$

Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$?

Exercice 9. Soit $f(z) = z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \cdots$.

a. Déterminer le rayon de convergence de cette série.

b. Soit p un point de cercle de convergence. Montrer que p est un point singulier ou tout voisinage de p contient un point singulier (qui appartient au cercle).