Devoir 1

à remettre le *mardi 9 février 2016*

Exercice 1. Soit a, b et c trois points distincts dans le plan complexe. Montrer que a, b et c forme une triangle équilatéral si et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 = bc + ca + ab.$$

Exercice 2. Soit S une partie de $\mathbb{C}$.

a. Montrer que la limite d'une suite d'éléments de S est un point adhérent à S.

(Explicitement, montrer que si $\{z_n\}$ une suite convergente d'éléments de S, alors $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ est un point adhérent à S.)

b. Montrer que tout point adhérent à S est limite d'une suite d'éléments de S.

c. En déduire que S est fermé ssi la limite de toute suite d'éléments de S est dans S.

Exercice 3. Déterminer si les suites complexes suivantes sont convergentes ou divergentes ; si la suite est convergente, trouver sa limite.

$$a.\ \left\{\frac{\sqrt{n} + i(n+1)}{n}\right\} \qquad b.\ \left\{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right\} \qquad c.\ \left\{\sqrt{n^2 - i\,n} - n\right\}$$

Exercice 4.

a. Montrer que si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est absolument convergente, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge.

b. Est-ce que la réciproque est vraie ?

Exercice 5.

Montrer que les séries suivantes sont absolument convergentes.

$$a.\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{3n}}{8^n + 1} \quad \text{pour } |z| < 2 \qquad\qquad b.\ \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 3^n)\, z^n \quad \text{pour } |z| < \tfrac{1}{3}$$