Devoir 2

à remettre le *24 mars 2016*

Exercice 1. Soit
$$f(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots .$$

a. Montrer que $f'(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ sur le disque $D(0,1)$.

b. Trouver le rayon de convergence de la série sans utiliser aucun test de convergence.

c. Montrer que
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Exercice 2.

a. Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction *continue* telle que $g(z) = g\left(\frac{z}{2}\right)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que g est constante sur $\mathbb{C}$.

b. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction *holomorphe* telle que $f(\frac{z}{2}) = \frac{1}{2}f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $f(z) = cz$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 3. Supposer que f soit **analytique** sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Soit $z_0 \in U$. Montrer que la fonction $g : U \to \mathbb{C}$ définie par
$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\[2ex] f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$
est dérivable au sens complexe sur U.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction complexe définie par
$$f(x+iy) = x^3y^2 + ix^2y^3.$$

a. Trouver tous les points où la fonction f est dérivable au sens complexe.

b. Est-ce que la fonction f est holomorphe en ces points ?

Exercice 5. Evaluer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_\gamma \text{Ré}(z)\, dz$, où γ est le bord du carré de sommets 0, 1, $1+i$ et i.

b. $\displaystyle\int_\gamma e^z\, dz$, où γ est la partie du cercle unité entre 1 et i dans le sens antihoraire.

c. $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^2}\, dz$, où γ est le cercle de centre 0 et rayon 2 dans le sens antihoraire.