

# Toute suite de fonctions qui vérifie le critère de Cauchy est uniformément convergente

Franco Saliola

26 janvier 2016

Une démonstration détaillée du fait que toute suite de fonctions qui vérifie le critère de Cauchy est uniformément convergente.

**Théorème 1** Soit  $\{f_n\}$  une suite de fonctions complexes sur  $X \subseteq \mathbb{C}$ . Si  $\{f_n\}$  vérifie le critère de Cauchy, alors  $\{f_n\}$  est uniformément convergente.

**Démonstration.** Il faut montrer qu'il existe  $L : X \rightarrow \mathbb{C}$  telle que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que si  $n \geq N$ , alors  $\|f_n - L\| < \varepsilon$ .

Fonction limite  $L : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Comme la suite de fonctions  $\{f_n\}$  vérifie le critère de Cauchy, la suite de nombres complexes  $\{f_n(w)\}$ , pour  $w \in X$ , est convergente.<sup>1</sup> On définit une fonction  $L : X \rightarrow \mathbb{C}$  où  $L(z)$  est la limite de la suite de nombres complexes  $\{f_n(z)\}$  : explicitement,

$$L(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z).$$

$\{f_n\}$  converge uniformément vers  $L$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $\{f_n\}$  vérifie le critère de Cauchy<sup>2</sup> et  $\varepsilon/4 > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que<sup>3</sup>

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon/4 \quad \text{si } m, n \geq N. \quad (1)$$

Soit  $n \geq N$ . Pour montrer que  $\|f_n - L\| < \varepsilon$ , on montrera que  $|f_n(z) - L(z)| \leq \varepsilon/2$  pour tout  $z \in X$ .<sup>4</sup>

Soit  $z \in X$ . Comme  $L(z)$  est la limite de la suite de nombres complexes  $\{f_n(z)\}$ , il existe  $N' \in \mathbb{N}$  tel que<sup>5</sup>

$$|f_m(z) - L(z)| < \varepsilon/4 \quad \text{si } m \geq N'. \quad (2)$$

Soit  $m = \max\{N, N'\}$ .<sup>6</sup> Alors,

$$\begin{aligned} |f_n(z) - L(z)| &= |f_n(z) - f_m(z) + f_m(z) - L(z)| \\ &\leq |f_n(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - L(z)| \\ &\leq \|f_n - f_m\| + |f_m(z) - L(z)| \\ &< \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle de (1) et (2), car  $n, m \geq N$  et  $m \geq N'$ .  $\square$

*Définition.* Une suite de fonctions  $\{f_n\}$  sur  $X$  converge uniformément sur  $X$  s'il existe une fonction  $L : X \rightarrow \mathbb{C}$  telle que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que si  $n \geq N$ , alors  $\|f_n - L\| < \varepsilon$ .

1. Soit  $w \in X$  et  $\varepsilon > 0$ . Car  $\{f_n\}$  vérifie le critère de Cauchy, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$  si  $m, n \geq N$ . D'où,

$$|f_m(w) - f_n(w)| \leq \|f_m - f_n\| < \varepsilon.$$

2. *Définition.*  $\{f_n\}$  vérifie le critère de Cauchy si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$  si  $m, n \geq N$ .

3. Noter que  $N$  ne dépend pas de  $z \in X$ .

4. Si  $|f_n(z) - L(z)| \leq \varepsilon/2$  pour  $z \in X$ ,

$$\|f_n - L\| = \sup_{z \in X} \{|f_n(z) - L(z)|\} \leq \varepsilon/2.$$

5. En général,  $N'$  dépend de  $z$ .

6. Donc, on a que  $m \geq N$  et  $m \geq N'$ .