Problème 1 de l'examen intra 1

Problème 1.

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière à coefficients dans $\mathbb{C}$.

a. Soit r un nombre réel positif tel que la suite réelle $\{|a_n|r^n\}$ est bornée. Montrer que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$.

b. En déduire que le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est égal à

$$\sup \left\{ \, r \in \mathbb{R} \ : \ \text{la suite } \{|a_n|r^n\} \text{ est bornée} \, \right\}.$$