

Feuille d'exercices 1

Exercice 1. (Sur la conjugaison complexe.) Soit $z = a + ib$, z_1, z_2 trois nombres complexes.

- | | | |
|--|--|---|
| a. $\operatorname{Ré}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ | e. $z\bar{z} = z ^2$ | i. Si $ z = 1$, alors $\frac{1}{z} = \bar{z}$. |
| b. $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ | f. $ \bar{z} = z $ | j. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ |
| c. $ z = \sqrt{a^2 + b^2}$ | g. $\bar{\bar{z}} = z$ | k. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ |
| d. $\tan(\arg(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Ré}(z)}$ | h. $\frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$ | l. $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$ |

Exercice 2. (Inégalité triangulaire.) Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

- a. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
 b. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$
 c. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ssi z_1 et z_2 sont colinéaires.
 d. (Inégalité triangulaire généralisée) Soit $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Alors,

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

avec égalité ssi z_1, z_2, \dots, z_n sont colinéaires.

Exercice 3. (Méthode de Tartaglia–Cardano pour résoudre les cubiques.)

- a. Montrer que le point d'inflexion de la cubique $X^3 + AX^2 + BX + C = 0$ est $X = -\frac{A}{3}$.
 b. En déduire que la substitution $X = x - \frac{a}{3}$ transforme la cubique ci-dessus en une cubique de la forme

$$x^3 - 3px - 2q = 0.$$

- c. Faire la substitution $x = s + t$ et montrer que x est une solution de la cubique ssi

$$st = p \quad \text{et} \quad s^3 + t^3 = 2q.$$

- d. À l'aide des deux équations $st = p$ et $s^3 + t^3 = 2q$, montrer que

$$s^6 - 2qs^3 + p^3 = 0 \quad \text{et} \quad t^6 - 2qt^3 + p^3 = 0.$$

- e. Noter que $s^6 - 2qs^3 + p^3 = 0$ est une équation polynomiale de degré 2 de la variable s^3 . Résoudre l'équation pour s^3 .
 f. Résoudre l'équation $t^6 - 2qt^3 + p^3 = 0$ pour t^3 .
 g. À l'aide de l'équation $s^3 + t^3 = 2q$, montrer que

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

est une solution de la cubique $x^3 - 3px - 2q = 0$.

- h. Trouver les trois solutions de $x^3 = 18x + 35$.

Exercice 4. Soit $p(z)$ un polynôme à coefficients réels.

- Montrer que $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$ pour tous $z \in \mathbb{C}$.
- Montrer que si z est un racine de $p(z)$, alors \bar{z} est aussi une racine de $p(z)$.

Exercice 5. Soit a , b et c trois points distincts qui appartiennent au cercle unité et qui satisfont $a + b + c = 0$. Montrer que a , b et c sont les sommets d'une triangle équilatéral.

Exercice 6. Dessiner des carrés sur les côtés d'un quadrilatère (voir la figure ci-dessous). Montrer que les segments reliant les centres des carrés opposés sont :

- de même longueur ;
- et orthogonaux.

