Feuille d'exercices 10

Théorème de Cauchy

Exercice 1. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Quel est le rayon de convergence de son développement taylorien en 0 ?

Exercice 2. Soit f une fonction analytique qui est analytique en 0 et en -2 telle que

$$f(z) = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} \qquad \text{(pour } |z| < 1\text{)}.$$

Soit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ des nombres complexes tels que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z+2)^n$$

pour z au voisinage de -2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$?

Inégalités de Cauchy

Exercice 3. Soit

$$f(z) = \frac{z^3 - 4z + 1}{(z^2+5)(z^3-3)}$$

et $\gamma(t) = Re^{it}$ pour $t \in [0, \pi]$. Montrer que

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq \frac{\pi R(R^3 + 4R + 1)}{(R^2-5)(R^3-3)}.$$

Formule intégrale de Cauchy

Exercice 4.

a. Montrer que

$$\int_{C(0,2)} \frac{\sin(z)}{z-i}\, dz = \frac{\pi}{e} - \pi e.$$

b. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2e^{it})}{2 - ie^{-it}}\, dt = \frac{i\pi e}{2} - \frac{i\pi}{2e}.$$

c. Montrer que

$$\int_{C(0,2)} \frac{\sin(z)}{z^2+1}\, dz = i\pi\left(e - e^{-1}\right).$$

Exercice 5. Montrer que

$$\int_{C(0,1)} \frac{e^{\sin(z)}}{z^3}\, dz = i\pi.$$

Exercice 6. Soit a, b des nombres complexes tels que $|a| > 1$ et $|b| < 1$. Montrer que

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{(z-a)^3(z-b)}\, dz = \frac{2\pi i}{(b-a)^3}.$$

Exercice 7. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} e^{r\cos(t)} \cos(r\sin(t) + t)\, dt = 0.$$

(Indice: Calculer l'intégrale de e^z le long un cercle.)