Feuille d'exercices 11

Principe du module maximum

Exercice 1. Soit f une fonction entière telle que $f(0) = 3 + 4i$ et $|f(z)| \leq 5$ pour $|z| < 1$. Calculer $f'(0)$.

Exercice 2. *(Principe du module minimum)* Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U telle que la fonction $|f| : U \to \mathbb{R}$ admet un minimum local en $z_0 \in U$. Montrer que : soit $f(z_0) = 0$; soit f est constante sur U.

Exercice 3. En utilisant le principe du module minimum, montrer que tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{C}$ possède une racine.

Exercice 4. Soit U un ouvert borné et connexe de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction analytique sur U, continue sur $\overline{U}$, qui ne s'annule pas sur U et qui est constante sur le borde de U. Montrer que f est constante sur U.

Exercice 5. Soit U un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$. Soit f et g deux fonctions définies et continues sur $\overline{U}$ et holomorphe sur U. Montrer que si f et g coincident sur la frontière de U, alors f et g coincident sur $\overline{U}$.

Exercice 6. Soit f une fonction entière. Montrer que si $\operatorname{Im} f \leq 0$, alors f est constante.

Homotopies

Exercice 7. Soit

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : [0,1] \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \Gamma(t,s) & = & e^{i\pi t} + s\left(e^{-i\pi t} - e^{i\pi t}\right) \end{array}$$

Dessiner les chemins $\Gamma(t,0)$, $\Gamma(t,1)$, $\Gamma(0,s)$, $\Gamma(1,s)$.

Exercice 8. Soit

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : [0,1] \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \Gamma(t,s) & = & (1-t)\left(z_0 + r_0 e^{2\pi i s}\right) + t\left(z_1 + r_1 e^{2\pi i s}\right) \end{array}$$

Dessiner les chemins $\Gamma(t,0)$, $\Gamma(t,1)$, $\Gamma(0,s)$, $\Gamma(1,s)$.

Exercice 9. Soit A, B, C trois points du plan complexe. Trouver une homotopie entre le segment $[A,C]$ et le chemin comprenant les segments $[A,B]$ et $[B,C]$.

Intégrales curvilignes et homotopies

Exercice 10. Dessiner les chemins suivants et évaluer les intégrales. *(Il est possible d'évaluer chaque intégrale sans un calcul explicite.)*

a. $\displaystyle\int_\alpha z\,dz$, où $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est le chemin $\alpha(t) = \cos(t) + 2i\sin(t)$.

b. $\displaystyle\int_\beta \frac{1}{z^2}\,dz$, où $\beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est le chemin $\beta(t) = \cos(t) + 2i\sin(t)$.

c. $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz$, où $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est le chemin $\gamma(t) = 2 + e^{it}$.

d. $\displaystyle\int_\delta \frac{1}{z^2-1}\,dz$, où δ est le cercle de centre 1 et rayon $\frac{1}{2}$.

Exercice 11. Soit f est un fonction analytique sur un ouvert U contenant un lacet simple γ et son intérieur. Montrer que si $z_0 \in U$ n'appartient pas au chemin γ, alors

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{z-z_0}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz.$$