Feuille d'exercices 12

Problème de primitives

Exercice 1. Pour chaque fonction suivante trouver une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$ si elle existe ; sinon, expliquer pourquoi une telle primitive n'existe pas.

a. $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)}$ *b.* $g(z) = \dfrac{1}{z^2(z+1)^2}$ *c.* $h(z) = \dfrac{2z+1}{z^2(z+1)^2}$

Séries de Laurent

Exercice 2. Trouver les développements en séries de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$$

sur les anneaux : *a.* $D^*(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$; *b.* $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z|\}$.

Exercice 3. Trouver les développements en séries de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)(2-z)} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2\,(z-2)}$$

sur les anneaux suivants.

a. $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ *b.* $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ *c.* $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z|\}$

Exercice 4. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$ et f la fonction complexe définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{pour tout } z \in D(0, \rho).$$

Posons

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{-n}.$$

a. Montrer que g converge sur $\left\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > \frac{1}{\rho}\right\}$.

b. Montrer que g converge uniformément sur $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \geq r\}$ pour tout $r > \frac{1}{\rho}$.

c. Montrer que g est holomorphe sur $\left\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > \frac{1}{\rho}\right\}$ et que la dérivée vérifie

$$g'(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{-n-1}.$$

Exercice 5. Soit $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ une série de Laurent qui converge sur le disque épointé $D^*(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-z_0| < R\}$. On définit, pour tout $r \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r < \rho$,

$$M(r) = \sup \{|f(z)| : |z - z_0| = r\}.$$

Montrer que $|a_n| \leq M(r)/r^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Théorème des résidus

Exercice 6.

Soit $r > 1$ et γ le segment de $-r$ à r composé avec le demi-cercle $re^{\pi t}$ pour $t \in [0,1]$.

a. Calculer le résidu de $\dfrac{1}{z^2+1}$ en i.

b. Calculer l'indice de i par rapport à γ.

c. Évaluer l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}\,dz$.

Exercice 7.

Soit $r > 2$ et γ le segment de $-r$ à r composé avec le demi-cercle $re^{\pi t}$ pour $t \in [0,1]$, et

$$f(z) = \frac{2z^2-1}{(z^2+1)(z^2+4)}.$$

a. Calculer les résidus de $f(z)$ en i et en $2i$.

b. Calculer l'indice de i et $2i$ par rapport à γ.

c. Évaluer l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$.

d. En déduire que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2-1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Indice: Utiliser l'estimation standard pour montrer que l'intégrale de $f(z)$ le long le demi-cercle $re^{\pi t}$ pour $t \in [0,1]$ converge vers 0 quand $r \to \infty$.

Exercice 8.

Soit γ le segment de $-r$ à r composé avec le demi-cercle $re^{\pi t}$ pour $t \in [0,1]$. Évaluer

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz.$$