Feuille d'exercices 2

Topologie de $\mathbb{C}$

Exercice 1. *(Sur les ouverts)* Un sous-ensemble $U \subseteq \mathbb{C}$ est un *ouvert* si pour tout $z \in U$ il existe un disque ouvert centré en z qui est completement inclus dans U. Montrer les énoncés suivants.

a. $\mathbb{C}$ est un ouvert.

b. L'ensemble vide $\emptyset$ est un ouvert.

c. L'intersection de deux ouverts est un ouvert.

d. L'intersection d'une famille *finie* d'ouverts est un ouvert.

e. La réunion de deux ouverts est un ouvert.

f. La réunion d'une famille (pas nécessairement finie) d'ouverts est un ouvert.

Exercice 2. *(Sur les fermés)* Un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ est un *fermé* si son complémentaire dans $\mathbb{C}$ est un ouvert. Pour chaque énoncé dans l'exercice précédent, formuler l'énoncé corrsepondant pour les fermés de $\mathbb{C}$.

Exercice 3. *(Sur les voisinages)* Soit $z \in \mathbb{C}$. Un *voisinage* de z est une partie de $\mathbb{C}$ qui contient un ouvert qui comprend z. Montrer les énoncés suivants.

a. $\mathbb{C}$ est un voisinage de z.

b. Tout voisinage de z contient z.

c. Tout sur-ensemble d'un voisinage de z est un voisinage de z.

d. L'intersection de deux voisinages de z est un voisinage de z.

e. Pout tout voisinage V de z, il existe un voisinage W de z tel que V soit voisinage de chacun des points de W.

Exercice 4. *(Sur les adhérences)* Soit $X, Y \subseteq \mathbb{C}$. L'*adhérence* de X, noté $\overline{X}$, est le plus petit fermé qui contient X. Montrer les énoncés suivants.

a. $X \subseteq \overline{X}$.

b. $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

c. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

d. $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$.

e. $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

f. X est fermé ssi $\overline{X} = X$.

g. $(\mathbb{C} \setminus X)^\circ = \mathbb{C} \setminus \overline{X}$.

Exercice 5. *(Sur les intérieurs)* Soit $X \subseteq \mathbb{C}$. L'*intérieur* de X, noté X°, est le plus grand ouvert qui est contenu dans X.

a. Montrer que $\mathbb{C} \setminus \overline{X} = (\mathbb{C} \setminus X)^\circ$.

b. Pour chaque énoncé dans l'exercice précédent, formuler l'énoncé corrsepondant pour l'intérieur d'une partie de $\mathbb{C}$.

Limites de fonctions

Exercice 6. Soit g une fonction complexe tel que $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$ est non nulle. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\big|g(z)\big| > \frac{|B|}{2}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $0 < |z - z_0| < \delta$.

Séries

Exercice 7. Déterminer si les séries convergent ou divergent.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{3}\right)^n$ *b.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ (pour $|z| \leq 1$). *c.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ ($z \in \mathbb{C}$).