Feuille d'exercices 3

Norme infini

Exercice 1. Soit f une fonction complexe définie sur une partie S de $\mathbb{C}$. La *norme infini* de f est

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in S} \{|f(z)|\} .$$

Montrer que la norme infini vérifie les conditions suivantes.

a. (séparation) $\|f\|_\infty = 0$ ssi $f = 0$.

b. (homogénéité) Si $z \in \mathbb{C}$, alors $\|zf\|_\infty = |z|\ \|f\|_\infty$.

c. (inégalité triangulaire) Pour tout $f, g : S \to \mathbb{C}$, on a que

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty ,$$
$$\|f-g\|_\infty \geq \big|\, \|f\|_\infty - \|g\|_\infty \big| \geq \|f\|_\infty - \|g\|_\infty .$$

Exercice 2. Une *distance* sur un ensemble E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes.

a. (symétrie) $d(a, b) = d(b, a)$ pour tout $a, b \in E$.

b. (séparation) $d(a, b) = 0$ ssi $a = b$.

c. (inégalité triangulaire) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

Montrer que

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty$$

est une distance sur l'ensemble de fonctions bornées $f : S \to \mathbb{C}$.

Suites de fonctions

Exercice 3. Montrer que la suite de fonctions

$$\left\{ \frac{1}{nz^2} \right\}$$

converge uniformément vers la function nulle sur $S = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \geq \frac{1}{17} \right\}$.

Exercice 4. Montrer que la suite de fonctions

$$\left\{ \frac{1}{1+nz^2} \right\}$$

converge uniformément vers la function nulle sur $S = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \geq \frac{1}{17} \right\}$.

Exercice 5. Soit la suite de fonctions

$$\left\{\frac{1}{1+nz^n}\right\}.$$

a. Montrer que la suite converge uniformément sur

$$S_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$$

vers la function nulle.

b. Montrer que, pour tout $r < 1$, la suite converge uniformément sur

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$$

vers la function constante 1.

c. Est-ce que la suite converge uniformément sur $\mathbb{C}$?

Séries de fonctions

Exercice 6. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ une série de fonctions sur X. On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ vérifie le *critère de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_{n+1} + f_{n+2} + \cdots + f_m\|_\infty < \varepsilon \qquad \text{si } n, m \geq N \text{ et } n < m.$$

Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ vérifie le critère de Cauchy ssi elle converge uniformément.

Exercice 7. Montrer que la somme d'une série de fonctions uniformément convergentes de fonctions continues est continue.

Tests de convergence

Exercice 8. Montrer qu'une série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ sur X est normalement convergente sur X ssi il existe une série $\sum_{n=0}^{\infty} r_n$ convergente de nombres réels positifs (ou nuls) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a que $\sup_{w \in X}\{|f_n(w)|\} = \|f_n\|_\infty \leq r_n$.

Exercice 9. *(Test de Abel)* Soit a_n et b_n des nombres *réels*. Supposons qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ et une constante $M \in \mathbb{R}$ qui vérifient les conditions suivantes :

(1) $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout $n \geq N$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

(3) $\left|b_N + b_{N+1} + b_{N+2} + \cdots + b_n\right| \leq M$ pour tout $n \geq N$.

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.