Feuille d'exercices 4

Séries de fonctions

Exercice 1. En classe, nous avons vu une esquisse de la démonstration de la proposition :

> *Toute série de fonctions normalement convergente sur $X \subseteq \mathbb{C}$ est absolument convergente et uniformément convergente sur X.*

a. Fournir les détails de la démonstration. *(Indice : critère de Cauchy)*

b. Montrer que la réciproque de la proposition est fausse en donnant un contre-exemple.

Exercice 2. *(Inversion de la sommation et du passage à la limite)* Soit $w \in \mathbb{C}$ et $\{f_n\}$ une suite de fonctions telle que $\lim\limits_{z\to w} f_n(z)$ converge pour tout n. Posons

$$a_n = \lim_{z\to w} f_n(z).$$

Montrer que si la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement, alors la série de nombres complexes $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lim_{z\to w} f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{z\to w} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z).$$

Rayon de convergence d'une série entière

Exercice 3. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière qui converge en $w = 1 + i\sqrt{3}$ mais pas absolument. Déterminer le rayon de convergence de la série.

Exercice 4. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est absolument convergente pour un point sur son cercle de convergence, montrer qu'elle converge pour chaque point sur son cercle de convergence.

Exercice 5. Déterminer le rayon de convergence pour chaque série entière :

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{8^n+1}(z-5)^{2n}$

c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} z^n$

d. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$

Exercice 6. Trouver le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(2 + (-1)^n\right)^n z^n$$

Exercice 7. Soit $0 < R < \infty$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes en fonction de R.

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ *b.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n$ *c.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^{2n}$ *d.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$

Exercice 8. Soit $R_a > 0$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $R_b > 0$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

a. Si R est le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$, montrer que $R \geq \min\{R_a, R_b\}$, avec égalité ssi $R_a \neq R_b$.

b. Si R est le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_n)z^n$, montrer que $R \geq R_a R_b$.

c. Si $a_n \neq 0$ pour tout n et R est le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n} z^n$, montrer que $R \leq \frac{1}{R_a}$.