Feuille d'exercices 5

Tests de convergence

Exercice 1. Montrer qu'une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ de nombres complexes est absolument convergente ssi les deux séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{Ré}(a_n) \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} \text{Im}(a_n)$$

sont absolument convergentes.

Exercice 2. *(Critère de D'Alembert)* Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série de nombres complexes et supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ pour $n > N$.

a. Montrer que si $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument.

b. Montrer que si $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est divergente.

Exercice 3. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série de nombres complexes absolument convergente. Montrer que la convergence et la somme de la série ne dépendent pas de l'ordre des termes. Explicitement, montrer que si σ est une permutation de $\mathbb{N}$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Rayon de convergence d'une série entière

Exercice 4. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7n^4 + 2n^3}{5n^4 + 23n^3}\right)^n z^n$

b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c^n} z^{2n}$, où $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$

c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n (2n)!} (z-1)^n$

d. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(n^2 + c^n\right) z^n$, où $c \in \mathbb{C}$

e. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} z^n$, où $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

f. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n) z^n$

Exercice 5. Soit $\{a_n\}$ une suite décroissante de nombres *réels positifs* convergeant vers 0. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en tout point $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$.

(Indice: appliquer le test d'Abel)

Exponentielle, sinus, cosinus

Exercice 6. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}) \qquad \overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z}) \qquad \overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z})$$

Exercice 7. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\sin(z + n\pi) = (-1)^n \sin(z) \qquad \cos(z + n\pi) = (-1)^n \cos(z)$$

Exercice 8. Vrai ou Faux : $|\cos(z)| \leq 1$ et $|\sin(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 9. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n!}\right) z^n = (z-1)\exp(z) + 1$.

Exercice 10. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n!}\right) z^n = (z^2 + z)\exp(z)$.

Fonctions analytiques

Exercice 11. Montrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ en trouvant le développement en série entière de f en tout point $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Exercice 12. Calculer le rayon de convergence du développement en série entière au point 0 des fonctions suivantes.

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+3} = \frac{5}{(z+3)(z-2)} \qquad \text{et} \qquad g(z) = z^2 e^z f(z)$$

Exercice 13. Soit $p(z)$ un polynôme. Montrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ est analytique sur $\{z \in \mathbb{C} : p(z) \neq 0\}$ en trouvant le développement en série entière de la fonction.