# Feuille d'exercices 6

## Principe de zéros isolés

**Exercice 1.** Soit $f, g$ des fonctions analytiques sur un ouvert connexe $U$. Montrer que si $f(z)g(z) = 0$ pour tout $z \in U$, alors $f(z) = 0$ pour tout $z \in U$ ou $g(z) = 0$ pour tout $z \in U$.[1]

## Principe de prolongement analytique

**Exercice 2.** Montrer que la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(z + \frac{1}{2}\right)^{n}$$

est une prolongement analytique de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Tracer les disques de convergence des deux séries dans le plan complexe.

**Exercice 3.** Soit les séries entières :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$$

*a.* Calculer le rayon de convergence de chaque série.

*b.* Tracer les disques de convergence dans le plan complexe.

*c.* Montrer que les séries sont des prolongements analytiques l'une de l'autre.

1. Pour les étudiants de MAT2260 : l'ensemble de fonctions analytiques sur $U$ est un anneau unitaire et le but de cet exercice est de montrer qu'il ne possède pas de diviseurs de zéro.