Feuille d'exercices 7

Principe de zéros isolés

Exercice 1. Supposons que $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ soit une fonction continue telle que $g(z) = g\left(\frac{z}{2}\right)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que g est constante sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction analytique sur U. Montrer que tout sous-ensemble compact de U ne contient qu'un nombre fini de zéros de la fonction f.

Exercice 3. Existe-il une fonction analytique f définie sur un ouvert connexe U contenant 0 qui vérifie : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, tel que $\frac{1}{n} \in U$,

a. $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$ *b.* $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$

Exercice 4. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière, U son disque de convergence et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.

a. Montrer que si $g(z)$ est identiquement nulle sur U, alors f est constante sur U.

b. Montrer que si pour tout $z \in U$ on a soit $f(z) = 0$ soit $g(z) = 0$, alors f est constante.

Principe de prolongement analytique

Exercice 5. Montrer que la fonction $g : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

est le prolongement analytique à $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ de la fonction $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

Exercice 6.

a. Montrer que la fonction

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!}$$

est un prolongement analytique de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \cos\left(\sqrt{p}\right). \end{aligned}$$

b. Montrer que la fonction $g(z) + \lambda \sin(\pi z)$ est aussi un prolongement analytique de f.