Feuille d'exercices 8

Dérivabilité de fonctions analytiques

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions analytiques sur un ouvert connexe U et soit $z_0 \in U$. Si les n-ième dérivées de f et g coincident en z_0 pour tout entier $n \geq 0$, montrer que $f(z) = g(z)$ pour tout z de U.

Exercice 2. Soit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série et montrer que $f''(z) = f(z)$.

Exercice 3. Calculer le rayon de convergence du développement taylorien en 0 de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+3} = \frac{5}{(z+3)(z-2)}.$$

et de la fonction $z^2 e^z f(z)$.

Exercice 4. Soit

$$f(z) = z - \frac{z^3}{3^3} + \frac{z^5}{5^3} - \frac{z^7}{7^3} + \cdots .$$

Montrer que la série entière pour $f'(z)$ converge en $z = i$, mais que la série entière pour $f''(z)$ ne converge pas en $z = i$. En deduire le rayon de convergence de $f(z)$.

Exercice 5. Calculer la somme de la série suivante pour $|z| < 1$:

$$1 + 4z + 9z^2 + 16z^3 + 25z^4 + \cdots + n^2 z^{n-1} + \cdots .$$

Fonctions holomorphes et Équations de Cauchy-Riemann

Exercice 6. Exprimer les fonctions suivantes sous la forme $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, où u et v sont des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et déterminer les points où les fonctions sont holomorphes.

a. $f(z) = z + iz^2$

b. $g(z) = \dfrac{1}{z}$

c. $h(z) = \dfrac{\overline{z}}{z}$

d. $\exp(z^2)$

e. $\exp(\exp(z))$

Exercice 7. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont holomorphes sur $\mathbb{C}$?

a. $x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

b. $x\sin(x) + iy\sin(x)$

c. $e^y\sin(x) - ie^y\cos(x)$

d. $x^3+y^2x+x^2-y^2+i(x^3+y^2x+x^2-y^2)$

Exercice 8. Trouver toutes les fonctions holomorphes $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que :

$$\text{Ré}\,(f(x+iy)) = 2xy$$

Exercice 9. Soit f une fonction définie sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ et soit $\overline{f}$ la fonction définie par $\overline{f}(z) = \overline{f(z)}$ pour tout $z \in U$. Si f est $\overline{f}$ sont holomorphes, alors f est constante.

Exercice 10. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Supposer qu'il il existe un point $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $|f(z) - z_0| > \varepsilon$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que f est constante. En déduire que l'image d'une fonction non-constante holomorphe sur $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathbb{C}$.