Feuille d'exercices 9

Équations de Cauchy–Riemann

Exercice 1. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$. Montrer que si $\operatorname{Im}(f(z)) = 0$ pour $z \in U$, alors f constante sur U.

Exercice 2. Soit $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ une fonction analytique sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ tel que $2\,u(x,y) - 3\,v(x,y) = 17$ pour tout $x+iy \in U$. Montrer que f est constante.

Exercice 3. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Existe-t-il une fonction v à valeurs réelles telle que

$$f(x+iy) = (x^2+y^2) + i\,v(x,y)$$

soit une fonction analytique sur U ?

Exercice 4. Existe-t-il un ouvert non vide U de $\mathbb{C}$ tel que $f(x+iy) = x^2 + ixy^3$ soit holomorphe sur U ?

Exercice 5. Montrer que toute fonction holomorphe de la forme

$$f(x+iy) = u(x) + iv(y),$$

où u et v sont des fonctions à valeurs réelles, est de la forme $f(z) = \lambda z + c$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{C}$.

Exercice 6. On définit une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $f(0) = 0$ et pour $x + iy \neq 0$:

$$f(x+iy) = \frac{(1+i)x^3 - (1-i)y^3}{x^2+y^2}.$$

Montrer que f satisfait les équations de Cauchy–Riemann, mais qu'elle n'est pas dérivable au sens complexe en 0.

Exponentielle et logarithme

Exercice 7. Montrer que sin et cos atteignent tout valeur $c \in \mathbb{C}$ (dénombrable souvent).

Exercice 8.

a. Soit $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $z = e^w$. Écrivez $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $w = u+iv$ avec $u, v \in \mathbb{R}$. Montrer que $u = \log r$ et $v = \theta + 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

b. Déterminer toutes les valeurs possible de $\log(1-i)$.

Exercice 9. Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $z_0 \in U$ tels que

$$\exp(f(z_0)) = z_0 \qquad \text{et} \qquad f'(z) = \frac{1}{z}$$

pour tout z de U. Montrer que f est une détermination du logarithme.

(*Indice : considérer* $g(z) = \frac{\exp(f(z))}{z}$.)