Quelques indices et esquisses des solutions

Feuille d'exercices 2

Exercice 2.

a. $\mathbb{C}$ est un fermé.

b. L'ensemble vide $\emptyset$ est un fermé.

c. L'intersection de deux fermés est un fermé.

d. L'intersection d'une famille (pas nécessairement finie) de fermés est un fermé.

e. La réunion de deux fermés est un fermé.

f. La réunion d'une famille *finie* de fermés est un fermé.

Exercice 5.

a. $X^\circ \subseteq X$.

b. $(X^\circ)^\circ = X^\circ$.

c. $(X \cap Y)^\circ = X^\circ \cap Y^\circ$.

d. $(X \cup Y)^\circ \supseteq X^\circ \cup Y^\circ$.

e. $\emptyset^\circ = \emptyset$.

f. X est ouvert ssi $X^\circ = X$.

g. $\mathbb{C} \setminus \overline{X} = (\mathbb{C} \setminus X)^\circ$.

Exercice 7.

(a) série géométrique : convergente, la somme est $1/10(3i - 1)$.

(b)

— Si $|z| < 1$, elle est convergente absolument (comparer avec la série géométrique).
— Si $|z| = 1$ et $z \neq 1$, elle est convergente (mais pas absolument).
— Si $z = 1$, elle diverge.

(c) Test de la racine : Si $z \neq 0$,

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} z^{2(n+1)}/(2(n+1))!}{(-1)^n z^{2n}/(2n)!} \right| = \frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+1)} \to 0 < 1$$

d'où $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \right|$ converge pour tout $z \neq 0$. Si $z = 0$, alors la somme est 1.

Feuille d'exercices 3

Exercice 3. Si $n > 289/\varepsilon$,

$$\left|\frac{1}{nz^2}\right| = \frac{1}{n|z|^2} \leq \frac{1}{n\frac{1}{289}} = \frac{289}{n} < \varepsilon.$$

Exercice 4. *Calcul de N :*

Pour que

$$\left|\frac{1}{1+nz^2} - 0\right| = \left|\frac{1}{1+nz^2}\right| = \frac{1}{|1+nz^2|} < \varepsilon$$

il faut que

$$|1+nz^2| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Or,

$$|1+nz^2| = |nz^2 - (-1)| \geq ||nz^2| - |-1|| \geq n|z|^2 - 1 \geq \frac{n}{289} - 1,$$

alors il suffit de prendre n assez grand pour que $\frac{n}{289} - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ ce qui est vrai ssi $n > 289\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Posons $N = 289\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right)$. Pour tout $n \geq N$,

$$\left|\frac{1}{1+nz^2} - 0\right| = \left|\frac{1}{1+nz^2}\right| = \frac{1}{|1+nz^2|} \leq \frac{1}{\frac{n}{289} - 1} \leq \frac{1}{\frac{N}{289} - 1} = \frac{1}{(\frac{1}{\varepsilon} + 1) - 1} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Exercice 5(a). *Calcul de N :*

Pour que

$$\left|\frac{1}{1+nz^n} - 0\right| = \left|\frac{1}{1+nz^n}\right| = \frac{1}{|1+nz^n|} < \varepsilon$$

il faut que

$$|1+nz^n| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Or, puisque $|z| \geq 1$ pour tout $z \in S_0$,

$$|1+nz^n| = |nz^n - (-1)| \geq \Big||nz^n| - |-1|\Big| \geq n|z|^n - 1 \geq n - 1.$$

Alors, il suffit de prendre n assez grand pour que

$$n - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

ce qui est vrai ssi

$$n > \frac{1}{\varepsilon} + 1.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $N = \frac{1}{\varepsilon} + 1$. Pour tout $n > N$,

$$\left|\frac{1}{1+nz^n} - 0\right| = \left|\frac{1}{1+nz^n}\right| = \frac{1}{|1+nz^n|} \leq \frac{1}{n-1} < \frac{1}{N-1} = \frac{1}{(\frac{1}{\varepsilon}+1)-1} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Exercice 6.

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément

ssi la suite de sommes partielles $\{\sum_{k=0}^{m} f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions qui converge uniformément

ssi $\{\sum_{k=0}^{m} f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy (pour les suites de fonctions)

ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n, m \geq N$ avec $n < m$, alors

$$\left\|\sum_{k=0}^{m} f_k - \sum_{k=0}^{n} f_k\right\|_\infty < \varepsilon$$

ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n, m \geq N$ avec $n < m$, alors

$$\|f_{n+1} + f_{n+2} + \cdots + f_m\|_\infty < \varepsilon$$

ssi $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ vérifie le critère de Cauchy sur les séries.

Exercice 7.

— Si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément vers S, alors les sommes partielles $\{f_1 + f_2 + \cdots + f_m\}$ converge uniformément vers S.

— Comme la somme finie de fonctions continues est continue, tout terme $f_1+f_2+\cdots+f_m$ de la suite de sommes partielles est continue.

— Donc, la fonction limite S est continue, car la limite d'une suite de fonctions continues qui converge uniformément est continue (résultat du cours).

Exercice 8.

— ($\Rightarrow$) Si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement, alors $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ est une série convergente à termes réels positifs ou nuls. Posons, alors, $r_n = \|f_n\|_\infty$.

— ($\Leftarrow$) S'il existe une telle série convergente $\sum_{n=0}^{\infty} r_n$, alors par le test de comparaison pour les séries réelles on a que $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ converge.