Quelques indices et esquisses des solutions

Feuille d'exercices 4

Exercice 1.

a. Soit $\{f_n\}$ une série de fonctions normalement convergente sur X. Donc, $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ converge.

— *Convergence absolue :*
— Si $w \in X$, alors $|f_n(w)| \leq \|f_n\|_\infty$ et donc $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(w)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$.
— Par le test de comparaison, $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(w)|$ est convergente.
— Donc, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est absolument convergente.

— *Convergence uniforme :* on montrera que la suite de sommes partielles $\{\sum_{k=0}^{m} f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément. Il suffit de montrer que la suite est une suite de Cauchy.
— Soit $\varepsilon > 0$.
— Comme $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement, $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ converge ; donc $\{\sum_{k=0}^{m} \|f_k\|_\infty\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite (de nombres réels) de Cauchy.
— Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left|\sum_{k=0}^{m} \|f_k\|_\infty - \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty\right| < \varepsilon \quad \text{si } n, m \geq N \text{ avec } n < m.$$

— D'où, pour tout $n, m \geq N$ avec $n < m$, on a que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=0}^{m} f_k - \sum_{k=0}^{n} f_k\right\|_\infty &= \|f_{n+1} + f_{n+1} + \cdots + f_m\|_\infty \\ &\leq \|f_{n+1}\|_\infty + \|f_{n+1}\|_\infty + \cdots + \|f_m\|_\infty \\ &= \left|\sum_{k=0}^{m} \|f_k\|_\infty - \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty\right| < \varepsilon.\end{aligned}$$

b. Soit $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(\pi x)}{n} & \text{si } n < x < n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors,
— $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, donc $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ ne converge pas normalement ;
— la suite $f_1(x), f_2(x), \ldots$ possède un seul terme non nul, donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge absolument et uniformément.

Exercice 3. Soit ρ le rayon de convergence. Si $|w| < \rho$, alors la série converge absolument pour tout $|z| \leq |w|$, ce qui est impossible car elle ne converge pas absolument en w. Si

$|w| > \rho$, alors la série diverge en w, ce qui est une contradiction. D'où, $\rho = |w| = |1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+3} = 2$.

Exercice 4. Soit ρ le rayon de convergence de la série. Supposons qu'il existe $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| = \rho$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n |w|^n$ converge. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = \rho$, on a que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n |z|^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |w|^n$ converge.

Exercice 5.

a. 0 ; appliquer le test du quotient

b. 2 ; appliquer le test de la racine

c. e, car les racines converge vers $1/e$

d. $1/4$; test du quotient

Exercice 6. La suite de $\sqrt[n]{|a_n|} = 2 + (-1)^n$ est

$$3, 1, 3, 1, 3, 1, \ldots$$

La limite supérieure de la suite est 3. Donc, par la formule de Cauchy-Hadamard, le rayon de convergence est $\frac{1}{3}$.

Exercice 7.

Attention : on ne peut pas appliquer le test du quotient ou le test de la racine, parce qu'il se pourrait que la limite de la suite $\{|a_{n+1}/a_n|\}$ ou la limite de la suite $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ n'existe pas.

a. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^2)^n$ converge si $|z^2| < R$ et diverge si $|z^2| > R$; le rayon est $\sqrt{R}$.

b. Comme $x \mapsto x^2$ est une fonction continue,

$$\begin{aligned}\limsup \sqrt[n]{|a_n^2|} &= \lim_{m\to\infty} \sup_{m\geq n} \sqrt[n]{|a_n|^2} = \lim_{m\to\infty} \sup_{m\geq n} |a_n|^{\frac{2}{n}} = \lim_{m\to\infty} \sup_{m\geq n} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^2 \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(\sup_{m\geq n} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^2 = \left(\lim_{m\to\infty} \sup_{m\geq n} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^2 = \left(\frac{1}{R}\right)^2;\end{aligned}$$

d'où, le rayon est R^2.

c. De même, le rayon est R.

d. Si la limite des quotients $|a_{n+1}/a_n|$ existe, alors

$$\left|\frac{\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a_n}{(n)!}}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \frac{1}{n+1} \longrightarrow \frac{1}{R} \times 0 = 0.$$

En général, on travail avec lim sup :

$$0 \leq \limsup \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}} = \limsup \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n!}} \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \times \limsup \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{1}{R} \times 0,$$

parce que l'on a vu dans le cours que $\limsup \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ (car le rayon de convergence de la série exponentielle est ∞).

Exercice 8.

a. Si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(a_n + b_n)z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| + \sum_{n=0}^{\infty} |b_n z^n|,$$

ceux qui sont deux séries convergentes. D'où, le rayon est au moins $\min\{R_a, R_b\}$.

b. Par la formule de Cauchy-Hadamard,

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n b_n|} \leq \limsup \left(\sqrt[n]{|a_n|}\,\sqrt[n]{|b_n|} \right) = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \limsup \sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1}{R_a R_b},$$

car $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ et $\{\sqrt[n]{|b_n|}\}$ sont deux suites à termes positifs.

c. Par la formule de Cauchy-Hadamard,

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{\left|\frac{1}{a_n}\right|} = \limsup \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\liminf \sqrt[n]{|a_n|}} \geq \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1/R_a} = R_a$$

d'où, $R \leq \frac{1}{R_a}$.

Feuille d'exercices 5

Exercice 1. Remarquer que

$$|\operatorname{Ré}(a_n)| \leq |a_n|$$
$$|\operatorname{Im}(a_n)| \leq |a_n|$$
$$|a_n| \leq |\operatorname{Ré}(a_n) + \operatorname{Im}(a_n)|$$

Exercice 3. Adapter la démonstration du Théorème 16 dans les *Notes de cours d'Analyse réelle I*, Olivier Collin aux séries complexes.

Exercice 4.

a. 5/7 (test de la racine)

b. $\sqrt{|c|}$. Par le test du quotient, ou en remarquant qu'elle est la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{c}\right)^n$,

c. ∞ ; par le test du quotient

d. $\frac{1}{|c|}$; par le test de la racine $\sqrt[n]{|n^2 + c^n|} \to |c|$.

e. k^k ; par le test du quotient :

$$\left|\frac{((n+1)!)^k/(kn+k)!}{(n!)^k/(kn)!}\right| = \frac{(n+1)^k}{(kn+k)(kn+k-1)(kn+k-2)\cdots(kn+1)}$$
$$= \frac{(1+\frac{1}{n})^k}{(k+\frac{k}{n})(k+\frac{k-1}{n})(k+\frac{k-2}{n})\cdots(k+\frac{1}{n})} \longrightarrow \frac{1}{k^k}.$$

f. 1 ; noter que $\sin(n) = \frac{e^{in} - e^{-in}}{2i}$, et appliquer le test du quotient.

Exercice 5. On applique le test d'Abel avec $b_n = z^n$; on a vu dans le cours que $b_1 + \cdots + b_{n-1}$ est borné si $z \neq 1$.

Exercice 8. Faux : $|\cos(iy)| > 1/2\, e^{|y|}$ et $|\sin(iy)| \geq 1/2\,\left(e^{|y|} - 1\right)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. Pour $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $|z - a| < |a|$, on a que

$$f(z) = \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (z - a)^n.$$

Exercice 13. Posons $p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_d)$. Par exemple, au point 0 on a que

$$\frac{1}{z - z_k} = -\frac{1}{z_k - z} = -\frac{1}{z_k}\left(\frac{1}{1 - \left(\frac{z}{z_k}\right)}\right) = -\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{z_k^{n+1}}$$

pour tout $|z| < |z_k|$. Calculer le produit de ses séries pour $k = 1, 2, \ldots, d$.

Feuille d'exercices 6

Exercice 2. Le disque de convergence de la première série est $D(-1/2, 3/2)$. Si $|z + 1/2| < 3/2$, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \left(z + \frac{1}{2}\right)^n = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2z+1}{3}\right)^n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1 - \left(\frac{2z+1}{3}\right)}\right) = \frac{1}{1 - z}$$

ce qui coincide avec $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

Exercice 3.

a. 2 et $\sqrt{5}$.

b. Disque de centre 0 et de rayon 2 ; disque de centre i et de rayon $\sqrt{5}$.

c. Il suffit de montrer qu'elles coincident sur le disque ouvert de centre i et de rayon 1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - i| < 1$. Alors,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}} = \frac{1}{2-i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^n} = \frac{1}{2-i}\left(\frac{1}{1 - \frac{z-i}{2-i}}\right) = \frac{1}{2-z}.$$

Et comme $|z - i| < 1$, on a que $|z| = |z - i + i| \leq |z - i| + |i| < 2$ et donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - z/2}\right) = \frac{1}{2-z}.$$