Quelques indices et esquisses des solutions

Feuille d'exercices 7

Exercice 1. On considère la suite $z, z/2, z/4, z/8, \ldots$. Alors, $g(z) = g(z/2) = g(z/4) = g(z/8) = \cdots$ et donc $g(z) = \lim_{n\to\infty} g(z/2^n) = g(\lim_{n\to\infty} z/2^n) = g(0)$ pour tout z.

Exercice 2. Tout sous-ensemble infini d'un compact possède un point d'accumulation dans le compact. Alors, si f possède un nombre infini de zéros dans un compact, alors l'ensemble des zéros de f possède un point d'accumulation dans U, ce qui entraîne que f est nulle.

Exercice 4. (a) Par le principe de zéros isolés, $na_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Donc, $f(z) = a_0$ pour tout $z \in U$.
(b) Supposons que f n'est pas constante sur U. Par le principe de zéros isolés, il existe un voisinage de 0 sur lequel f ne s'anule pas (sauf peut-être en 0). Donc, $g(z) = 0$ au voisinage de 0. Par le principe de zéros isolés, $a_n = 0$ pour $n \geq 1$, et donc $f(z) = a_0$ pour tout $z \in U$.

Exercice 6. Par le test du quotient, le rayon de convergence de la série est ∞ ; et $g(p) = \cos\left(\sqrt{p}\right) = f(p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Également, $g(p) + \lambda \sin(\pi p) = g(p) = f(p)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

Feuille d'exercices 8

Exercice 1. Par hypothèse, les séries de Taylor de f et g coincident au voisinage de z_0, et comme toute fonction analytique sur U est la somme de sa série de Taylor, on a que f et g coincident au voisinage de z_0. Comme U est connexe, par le principe de prolongement analytique, f et g coincident sur U.

Exercice 2.

a. test du quotient :

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(2n)!}{1/(2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{1} = \infty$$

b. on calcule la dérivée de la série terme-à-terme

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{2n}{(2n)!} z^{2n-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)!} z^{2n-1}$$
$$f''(z) = \sum_{n\geq 2} \frac{2n-1}{(2n-1)!} z^{2n-2} = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(2n-2)!} z^{2n-2} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} z^{2n2} = f(z)$$

Exercice 5. On peut obtenir la série à partir de la série géométrique $\sum z^n$ par une suite de dérivées :

$$\begin{aligned}
g(z) &= 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots + z^n + \cdots &&= \frac{1}{1-z} \\
g'(z) &= 0 + 1 + 2z^1 + 3z^2 + 4z^3 + \cdots + nz^{n-1} + \cdots &&= \frac{1}{(1-z)^2} \\
zg'(z) &= 0 + z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \cdots + nz^n + \cdots &&= \frac{z}{(1-z)^2} \\
(zg'(z))' &= 0 + 1 + 4z^1 + 9z^2 + 16z^3 + \cdots + n^2 z^{n-1} + \cdots &&= \frac{1+z}{(1-z)^3}
\end{aligned}$$

Exercice 6.

$$\begin{aligned}
f(x+iy) &= (x+iy) + i(x+iy)^2 = (x+iy) + i(x^2 + xiy + iyx + (iy)^2) \\
&= (x+iy) + i(x^2 + 2ixy - y^2) = \underbrace{(x - 2xy)}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{(x^2 - y^2 + y)}_{v(x,y)}
\end{aligned}$$

$$g(x+iy) = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy}\frac{(x-iy)}{(x-iy)} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i\underbrace{\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)}_{v(x,y)}$$

$$h(x+iy) = \frac{x-iy}{x+iy} = \frac{x-iy}{x+iy}\frac{(x-iy)}{(x-iy)} = \frac{(x^2-y^2) - 2ixy}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i\underbrace{\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)}_{v(x,y)}$$

$$\exp((x+iy)^2) = e^{x^2}e^{iy^2} = e^{x^2}\left(\cos(y^2) + i\sin(y^2)\right) = \underbrace{e^{x^2}\cos(y^2)}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{e^{x^2}\sin(y^2)}_{v(x,y)}$$

Exercice 7. Par les équations de Cauchy–Riemann : (a) oui (b) non (c) oui (d) non

Exercice 9. Comme

$$\begin{aligned}
f(x+iy) &= u(x,y) + iv(x,y) \\
\overline{f}(x+iy) &= u(x,y) - iv(x,y)
\end{aligned}$$

sont holomorphes, par les équations de Cauchy–Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(-v)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

C'est-à-dire, u et v sont des fonctions constantes. Donc, f est constante.