Quelques indices et esquisses des solutions

Feuille d'exercices 9

Exercice 1. On a pour tout $z \in U$

$$f(z) = \text{Ré}(f(z)) + i\,\text{Im}(f(z)) = \text{Ré}(f(z)).$$

Par les équations de Cauchy–Riemann :

$$\frac{\partial\,\text{Ré}(f)}{\partial x} = \frac{\partial\,\text{Im}(f)}{\partial y} = \frac{\partial 0}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial\,\text{Ré}(f)}{\partial y} = -\frac{\partial\,\text{Im}(f)}{\partial x} = -\frac{\partial 0}{\partial x} = 0$$

Donc, Ré(f) est constante, d'où f est constante.

Exercice 2.

$$2\,\frac{\partial u}{\partial x} - 3\,\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$2\,\frac{\partial u}{\partial y} - 3\,\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

d'où

$$2\,\frac{\partial u}{\partial x} + 3\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$
$$2\,\frac{\partial u}{\partial y} - 3\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci admet une seule solution : $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, ce qui entraîne que $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Donc, u et v sont constantes.

Exercice 3. Il n'existe pas une fonction $v(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que f est analytique. En effet, supposons qu'une telle fonction existe. Par les équations de Cauchy–Riemann :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x} = 2x$$

d'où

$$v(x, y) = \int (2x)\,dx[y] = 2xy + c$$

de sorte que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y.$$

Or,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y} = 2y \neq -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Exercice 4.

— Notons $f = u(x,y) + iv(x,y)$.

— Si U est un ouvert non vide tel que f est holomorphe sur U, alors il faut que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} = 3xy^2$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} = -y^3$$

pour tout $x+iy \in U$.

— En particulier, il faut que $y = 0$ pour tout $x + iy \in U$, et donc $U \subseteq i\mathbb{R}$.

— Ceci est absurde, car $i\mathbb{R}$ est d'intérieur vide.

Exercice 5.

— Soit U un ouvert non vide tel que f est holomorphe sur U.

— Pour tout $x + iy \in U$ on a que

$$u'(x) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = v'(y)$$

Donc, $u''(x) = 0$ et $v''(y) = 0$.

— D'où, $u(x) = \lambda x + c_1$ et $v(y) = \lambda' y + c_2$; et comme $u'(x) = v'(y)$ on a que $\lambda = \lambda'$.

— Donc,

$$f(x+iy) = u(x) + iv(y) = (\lambda x + c_1) + i(\lambda y + c_2) = \lambda(x+iy) + (c_1 + ic_2).$$

En particulier, $f(z) = \lambda z + c$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{C}$.

— Il reste à montrer que toute fonction de la forme $f(z) = \lambda z + c$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{C}$ est holomorphe. Mais ceci est évident, car $f(z)$ est un polynôme.

Exercice 7. Rappeler que $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Écrivons $2c = e^{iz} + e^{-iz}$, où $c = i\sin(z)$. Alors, $e^{iz} = c \pm \sqrt{c^2-1}$. Comme exp attient toute les valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a que c peut être un nombre complexe quelconque. Par exemple, si on veut que $\sin(z) = 17i$ (ici, $c = -17$), alors on trouve $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $e^w = -17 + \sqrt{17^2 - 1}$; puis, $z = -iw$.

Exercice 8. (a)

$$e^w = e^u e^{iv} = z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Donc,

$$e^u = |e^u||e^{iv}| = |r||\cos\theta + i\sin\theta| = r$$

d'où $\log(r) = \log(e^u) = u$.
Ainsi,

$$re^{iv} = e^u e^{iv} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

d'où

$$e^{iv} = \cos\theta + i\sin\theta$$

et donc $v = \theta + 2\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
(b) $1 - i = \sqrt{2}\exp\left(\frac{7\pi i}{4}\right)$, donc $\log(1-i) = \log(\sqrt{2}) + \left(\frac{7\pi i}{4} + 2k\pi i\right)$.

Exercice 9. Posons $g(z) = \frac{\exp(f(z))}{z}$ pour $z \in U$, et montrons que g est la fonction constante 1.

— g est analytique sur U, car $\frac{1}{z}$ et $\exp(f(z))$ y sont analytiques.

— g est constante sur U, car la dérivée de g est nulle :

$$\begin{aligned} g'(z) &= \Big(z^{-1}\exp(f(z))\Big)' \\ &= z^{-1}\exp(f(z))f'(z) + (-1)z^{-2}\exp(f(z)) \\ &= g(z)f'(z) - g(z)/z \\ &= g(z)\cdot 1/z - g(z)/z \\ &= 0. \end{aligned}$$

— Donc, g est constante sur U ; et $g(z) = g(z_0) = \exp(f(z_0))/z_0 = 1$.

Feuille d'exercices 10

Exercice 1.

> *Rappel : Si une fonction est holomorphe sur un ouvert U et $z_0 \in U$, alors elle est la somme de sa série de Taylor en z_0 sur le plus grand disque de center z_0 contenu dans U.*

Si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, alors le plus grand disque ouvert de centre 0 contenu dans $\mathbb{C}$ est de rayon infini. Donc, le rayon de convergence de la série de Taylor de f en 0 (en fait, en n'importe quel point), est ∞.

Exercice 2.
Solution 1.

- On remarque que $f(z) = F'(z)$, où $F(z) = \frac{1}{1-z}$. En effet, F est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, et sur le disque $D(0,1)$ elle admet le développement
$$F(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots \qquad \text{pour } |z| < 1\,;$$
d'oú,
$$f(z) = F'(z) = 0 + 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots \qquad \text{pour } |z| < 1.$$
- Comme f et F' coincident sur $D(0,1)$, par le principe de prolongement analytique,
$$F'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$
est un prolongement analytique de f à l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- Comme le plus grand disque de centre -2 contenu dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ est de rayon 3, on a que la série de Taylor de $f(z)$ en -2 a un rayon de convergence égal à 3.

Solution 2 (calcul explicite).

- On remarque que $f(z) = F'(z)$, où $F(z) = \frac{1}{1-z}$ (voir ci-dessus).
- Donc,
$$f^{(n)}(z) = F^{(n+1)}(z) = \frac{(n+1)!}{(1-z)^{n+1}}$$
- f est la somme de sa série de Taylor en -2, donc
$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(-2) = \frac{1}{n!} \frac{(n+1)!}{(1-(-2))^{n+1}} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$$
- D'où,
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} (z+2)^n.$$
- On applique le test du quotient :
$$\left| \frac{n+2}{3^{n+2}} \right| \Big/ \left| \frac{n+1}{3^{n+1}} \right| = \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{1}{3}.$$
- Le rayon de convergence de la série est 3.

Exercice 3.

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| &\le \int_\gamma \left|\frac{z^3-4z+1}{(z^2+5)(z^3-3)}\right| dz\\ &\le \int_\gamma \frac{|z|^3+4|z|+1}{(|z|^2-5)(|z|^3-3)}\,dz\\ &= L(\gamma)\frac{R^3+4R+1}{(R^2-5)(R^3-3)} = \pi R\frac{R^3+4R+1}{(R^2-5)(R^3-3)}\end{aligned}$$

Exercice 4.

Formule intégrale de Cauchy : *si $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe et $\overline{D(z_0,r)} \subseteq U$, on a que*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})\,re^{it}}{(z_0+re^{it})-z}\,dt$$

pour tout $z \in D(z_0,r)$.

4(a) Posons $f = \sin$, $z_0 = 0$, $r = 2$ et $z = i$:

$$\sin(i) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,2)} \frac{\sin(w)}{w-i}\,dw$$

Comme $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$:

$$\sin(i) = \frac{e^{i^2}-e^{-i^2}}{2i} = \frac{e^{-1}-e^{1}}{2i} = \frac{1}{2ie} - \frac{e}{2i} = -\frac{i}{2e} + \frac{ie}{2}$$

et donc

$$\int_{C(0,2)} \frac{\sin(w)}{w-i}\,dw = 2\pi i\sin(i) = 2\pi i\left(-\frac{i}{2e}+\frac{ie}{2}\right) = \frac{\pi}{e} - \pi e.$$

4(b) Par la formule intégrale de Cauchy, avec $f(z) = \sin(z)$, $z_0 = 0$, $r = 2$ et $z = i$,

$$\sin(i) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2e^{it})\,2e^{it}}{(2e^{it})-i}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2e^{it})}{2-ie^{-it}}\,dt$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2e^{it})}{2-ie^{-it}}\,dt = \pi\sin(i) = -\frac{i\pi}{2e} + \frac{\pi i e}{2}.$$

4(c) Remarquer que

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right).$$

Par la formule intégrale de Cauchy appliquée à la fonction $\sin(z)$ deux fois (avec $z = i$ et $z = -i$) :

$$\begin{aligned}
\int_{C(0,2)} \frac{\sin(z)}{z^2+1}\,dz &= \frac{1}{2i}\left(\int_{C(0,2)} \frac{\sin(z)}{z-i}\,dz\right) - \frac{1}{2i}\left(\int_{C(0,2)} \frac{\sin(z)}{z+i}\,dz\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(2\pi i \sin(i)\right) - \frac{1}{2i}\left(2\pi i \sin(-i)\right) \\
&= 2\pi \sin(i) \\
&= 2\pi \frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} \\
&= \pi i \left(e - e^{-1}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 5.

Théorème de Cauchy : *si $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe et $\overline{D(z_0,r)} \subseteq U$, alors les coefficients a_n du développement en série entière de f en z_0 sont donnés par*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

— Posons $f(z) = e^{\sin(z)}$, $z_0 = 0$, $r = 1$, $n = 2$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{e^{\sin(z)}}{(z-0)^{2+1}}\,dz = \frac{(e^{\sin(z)})^{(2)}(0)}{2!}.$$

— Comme

$$f'(z) = e^{\sin(z)} \cos(z) \qquad\qquad f''(z) = e^{\sin(z)} \cos^2(z) - e^{\sin(z)} \sin(z)$$

on a que

$$\int_{C(0,1)} \frac{e^{\sin(z)}}{z^3}\,dz = 2\pi i \frac{1}{2!} = \pi i.$$

Exercice 6. Par la formule intégrale de Cauchy appliquée à $f(z) = 1/(z-a)^3$:

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{(z-a)^3(z-b)}\,dz = \int_{C(0,1)} \frac{1/(z-a)^3}{(z-b)}\,dz = 2\pi i f(b) = 2\pi i/(b-a)^3.$$

Exercice 7. L'intégrale est la partie réelle de l'intégrale $\int_{C(0,r)} e^z\,dz$.