

Devoir 1à remettre le *vendredi 3 octobre 2014***Exercice 1.**Soient A, B, C et D les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{M} = \{A, B, C, D\}$ muni de la multiplication des matrices (notée \times).

- Est-ce que \mathcal{M} est stable pour \times ?
- Est-ce que \times est associative dans (\mathcal{M}, \times) ?
- Est-ce que \times est commutative dans (\mathcal{M}, \times) ?
- Est-ce que (\mathcal{M}, \times) possède un élément neutre ? Si oui, identifier l'élément neutre.
- Pour chaque élément inversible dans (\mathcal{M}, \times) , identifier son inverse.
- Est-ce que (\mathcal{M}, \times) est un groupe ?
- Est-ce que (\mathcal{M}, \times) est un sous-groupe de $\text{GL}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 2.

Soit

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0) \right\}.$$

- Montrer que G muni de la multiplication matricielle est un sous-groupe de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$.
- Montrer que G est isomorphe au groupe \mathbb{C}^* .

Exercice 3.Soit G un groupe non abélien tel que tout sous-groupe propre de G est abélien. Montrer qu'il existe deux éléments a et b de G tels que $G = \langle \{a, b\} \rangle$.

Exercice 4.

Soient α et β les deux permutations suivantes.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calculer les sous-groupes $\langle \alpha \rangle$, $\langle \beta \rangle$, et $\langle \alpha, \beta \rangle$ de S_4 .
- Montrer que $\langle \alpha, \beta \rangle$ et $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ sont isomorphes.
- Déterminer tous les homomorphismes de $\langle \alpha, \beta \rangle$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Pour chaque homomorphisme, déterminer son noyau et son image.

Exercice 5.

Est-il possible de passer entre les configurations en n'utilisant que des mouvements autorisés (mouvements vertical ou mouvement horizontal des tuiles) ?

