Devoir 2

à remettre le *vendredi 31 octobre 2014*

Exercice 1. On définit une relation sur $\mathbb{R}$ par

$$x \sim y \text{ ssi } x - y \in \mathbb{Q}.$$

a. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

b. Décrire la classe d'équivalence de 0. C'est-à-dire, identifier l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : x \sim 0\}$.

c. Montrer que $x \sim x + q$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

d. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $0 \leq y \leq 1$ tel que $x \sim y$.

Exercice 2. Soit G un groupe. On définit une relation sur G par

$$a \sim b \text{ ssi il existe } x \in G \text{ tel que } a = xbx^{-1}.$$

a. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G.

b. Décrire la classe d'équivalence de l'élément neutre e.

c. Calculer les classes d'équivalence de $\sim$ sur $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

d. Calculer les classes d'équivalence de $\sim$ sur S_3.

Exercice 3. Soit p un nombre premier. Montrer que si H et K sont deux sous-groupes d'un groupe G tels que $|H| = |K| = p$, alors $H = K$ ou $H \cap K = \{e\}$.

Exercice 4. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G tel que $[G : H] = 2$.

a. Montrer que $gH = Hg$ pour tout $g \in G$.

b. Montrer que si a et b sont deux éléments de G tels que $a, b \notin H$, alors $ab \in H$.

Exercice 5. Pour chaque énoncé, indiquer s'il est vrai ou faux. Justifier la réponse.

a. Tout groupe non trivial possède au moins deux sous-groupes normaux distincts.

b. Si H est un sous-groupe normal de G et $a \in G$, alors $ah = ha$ pour tout $h \in H$.

c. Si $H \triangleleft G$ et $f : G \to G'$ est un homomorphisme de groupes, alors $f(H) \triangleleft G'$.

d. Si $H \triangleleft G$ et si $[G : H] = 2014$, alors $x^{2014} \in H$ pour tout $x \in G$.