Devoir 3

à remettre le *mardi 2 décembre 2014*

Exercice 1. Soit G un groupe et M et N deux sous-groupes normaux de G tel que $N \cap M = \{e\}$. Montrer que $n\,m = m\,n$ pour tout $m \in M$ et pour tout $n \in N$.

Exercice 2. Soit G un groupe fini, H un sous-groupe de G et N un sous-groupe normal de G. Montrer que si $|H|$ est premier avec $[G : N]$, alors $H \subseteq N$.

Exercice 3. Soit H un sous-groupe d'un groupe G tel que $[G : H] = m \in \mathbb{N}$. On définit

$$\Phi : G \to S_{G/H}$$
$$\Phi(g)(xH) = (gx)H$$

où $S_{G/H}$ est le groupe de permutations de l'ensemble G/H. (Donc, $S_{G/H} \cong S_m$.)

a. Montrer que Φ est un homomorphisme de groupes.

b. Montrer que si H est un sous-groupe normal de G, alors H est le noyau de Φ. Sinon, $\ker(\Phi)$ est le plus grand sous-groupe normal de G contenu dans H.

c. Montrer que $g^{m!} \in H$ pour tout élément $g \in G$.
(Remarquer que H n'est pas forcément normal.)

Exercice 4. Soit H et N deux sous-groupes normaux de G tels que $H \subseteq N$. On définit

$$\begin{aligned} \varphi : G/H &\longrightarrow G/N \\ gH &\longmapsto gN \end{aligned}$$

pour tout $g \in G$.

a. Montrer que φ est une application bien définie.

b. Montrer que φ est un homomorphisme de groupes.

c. Calculer le noyau et l'image de φ.

Exercice 5. Soient $G = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, $H = \langle 4 + 24\mathbb{Z} \rangle$ le sous-groupe de G engendré par $4 + 24\mathbb{Z}$, et $N = \langle 6 + 24\mathbb{Z} \rangle$ le sous-groupe de G engendré par $6 + 24\mathbb{Z}$.

a. Créer une liste de tous les éléments de $(H + N)/N$.

b. Créer une liste de tous les éléments de $H/(H \cap N)$

c. Indiquer explicitement la correspondance entre $H/(H \cap N)$ et $(H + N)/N$ du deuxième théorème d'isomorphisme.