Sous-groupes de Sylow de A_4

$$A_4 = \Big\{\varepsilon,\ (123), (124), (134), (234), (132), (142), (143), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\Big\}$$

Comme $|A_4| = 3 \times 2^2$, il possède un sous-groupe d'ordre 3 et un sous-groupe d'ordre 2^2.

Sylow I : un 3–sous-groupe de Sylow de A_4

Pour trouver un sous-groupe de G d'ordre p^n, où $|G| = p^n m$ et p ne divise pas m :
– on fait agir G par multiplication à gauche sur ses parties de cardinalité p^n ;
– on choisit une orbite de cardinalité *non* divisible par p ; et
– on calcule le stabilisateur d'un élément dans l'orbite.

On fait agir A_4 sur ses parties de cardinalité 3 : pour $\sigma \in A_4$ et $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset A_4$ on définit

$$\sigma \bullet \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{\sigma\alpha, \sigma\beta, \sigma\gamma\}.$$

On calcule 21 orbites :

$$\begin{array}{lcl}
|\operatorname{Orb}\big(\{(143), (132), (12)(34)\}\big)| & = & 12 \\
|\operatorname{Orb}\big(\{(142), (143), (12)(34)\}\big)| & = & 12 \\
|\operatorname{Orb}\big(\{(243), (132), (142)\}\big)| & = & 12 \\
|\operatorname{Orb}\big(\{(143), (234), (142)\}\big)| & = & 12 \\
|\operatorname{Orb}\big(\{(143), (124), (12)(34)\}\big)| & = & 12 \\
|\operatorname{Orb}\big(\{(142), (132), (12)(34)\}\big)| & = & 4 \\
|\operatorname{Orb}\big(\{(124), (132), (12)(34)\}\big)| & = & 12 \\
|\operatorname{Orb}\big(\{(243), (143), (12)(34)\}\big)| & = & 4 \\
|\operatorname{Orb}\big(\{(143), (132), (142)\}\big)| & = & 12 \\
|\operatorname{Orb}\big(\{(12)(34), (124), (142)\}\big)| & = & 12 \\
|\operatorname{Orb}\big(\{(123), (124), (12)(34)\}\big)| & = & 4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
|\operatorname{Orb}\big(\{(143), (132), (124)\}\big)| & = & 12 \\
|\operatorname{Orb}\big(\{(243), (234), (12)(34)\}\big)| & = & 12 \\
|\operatorname{Orb}\big(\{(143), (234), (12)(34)\}\big)| & = & 12 \\
|\operatorname{Orb}\big(\{(243), (142), (12)(34)\}\big)| & = & 12 \\
|\operatorname{Orb}\big(\{(124), (132), (142)\}\big)| & = & 12 \\
|\operatorname{Orb}\big(\{(243), (132), (12)(34)\}\big)| & = & 12 \\
|\operatorname{Orb}\big(\{(243), (143), (132)\}\big)| & = & 12 \\
|\operatorname{Orb}\big(\{(124), (234), (12)(34)\}\big)| & = & 12 \\
|\operatorname{Orb}\big(\{(134), (234), (12)(34)\}\big)| & = & 4 \\
|\operatorname{Orb}\big(\{(143), (124), (142)\}\big)| & = & 12
\end{array}$$

Il existe 4 orbites de cardinalité *non* divisible par 3.

On choisit une orbite et on calcul le stabilisateur d'un élément dans l'orbite :

$$\operatorname{Stab}\Big(\{(123), (124), (12)(34)\}\Big) \quad = \quad \Big\{\varepsilon, (134), (143)\Big\}$$

Ceci est un sous-groupe de A_4 d'ordre 3.

Sylow II : 3–sous-groupes de A_4

Pour trouver tout *sous-groupe de* G *d'ordre* p^n*, où* $|G| = p^n m$ *et* p *ne divise pas* m :
– on fait agir G par multiplication à gauche sur ses parties de cardinalité p^n ;
– on choisit une seule orbite de cardinalité *non* divisible par p ; et
– on calcule le stabilisateur de chaque élément dans l'orbite.

On fait agir A_4 sur ses parties de cardinalité 3 : pour $\sigma \in A_4$ et $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset A_4$ on définit

$$\sigma \bullet \{\alpha, \beta, \gamma\} = \{\sigma\alpha, \sigma\beta, \sigma\gamma\}.$$

L'orbite de $\{(123), (124), (12)(34)\}$ est de cardinalité 4, ce qui n'est pas divisible par 3 :

$$\mathrm{Orb}\Big(\{(12)(34), (123), (124)\}\Big) = \left\{ \begin{array}{lll} \{(12)(34), & (123), & (124)\}, \\ \{\varepsilon, & (243), & (234)\}, \\ \{(14)(23), & (142), & (143)\}, \\ \{(13)(24), & (134), & (132)\} \end{array} \right\}$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \mathrm{Stab}\Big(\{(123), (124), (12)(34)\}\Big) &= \Big\{\varepsilon, (134), (143)\Big\} \\ \mathrm{Stab}\Big(\{(243), \varepsilon, (234)\}\Big) &= \Big\{\varepsilon, (234), (243)\Big\} \\ \mathrm{Stab}\Big(\{(143), (14)(23), (142)\}\Big) &= \Big\{\varepsilon, (123), (132)\Big\} \\ \mathrm{Stab}\Big(\{(134), (13)(24), (132)\}\Big) &= \Big\{\varepsilon, (124), (142)\Big\} \end{aligned}$$

Ceux-ci sont tous les sous-groupes de A_4 d'ordre 3.

SYLOW I/II : 4–SOUS-GROUPES DE SYLOW DE A_4

Pour trouver tout *sous-groupe de G d'ordre p^n, où $|G| = p^n m$ et p ne divise pas m :*
– on fait agir G par multiplication à gauche sur ses parties de cardinalité p^n ;
– on choisit une seule orbite de cardinalité *non* divisible par p ; et
– on calcule le stabilisateur de chaque élément dans l'orbite.

On fait agir A_4 sur ses parties de cardinalité 4 : pour $\sigma \in A_4$ et $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset A_4$ on définit

$$\sigma \bullet \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} = \{\sigma\alpha, \sigma\beta, \sigma\gamma, \sigma\delta\}.$$

On calcule 45 orbites :

$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(134),(12)(34),(243),(124)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(143),(234),(124),(142)\}\right)\rvert$	$=$	12
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(14)(23),(143),(124),(142)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(134),(124),(234),(142)\}\right)\rvert$	$=$	6
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(134),(243),(132),(124)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(12)(34),(234),(124),(142)\}\right)\rvert$	$=$	12
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(134),(12)(34),(124),(142)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(143),(12)(34),(124),(142)\}\right)\rvert$	$=$	12
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(243),(124),(234),(12)(34)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(143),(234),(124),(132)\}\right)\rvert$	$=$	3
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(243),(143),(124),(142)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(14)(23),(143),(132),(142)\}\right)\rvert$	$=$	12
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(243),(143),(132),(142)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(142),(143),(132),(12)(34)\}\right)\rvert$	$=$	12
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(134),(143),(132),(12)(34)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(124),(234),(132),(12)(34)\}\right)\rvert$	$=$	12
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(243),(142),(234),(12)(34)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(134),(124),(132),(12)(34)\}\right)\rvert$	$=$	12
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(134),(124),(132),(142)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(134),(243),(234),(132)\}\right)\rvert$	$=$	6
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(134),(124),(234),(12)(34)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(143),(234),(132),(12)(34)\}\right)\rvert$	$=$	12
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(243),(234),(132),(12)(34)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(243),(124),(132),(142)\}\right)\rvert$	$=$	6
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(243),(143),(132),(12)(34)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(143),(132),(124),(142)\}\right)\rvert$	$=$	12
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(243),(124),(132),(12)(34)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(243),(143),(234),(12)(34)\}\right)\rvert$	$=$	12
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(143),(132),(124),(12)(34)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(134),(143),(124),(142)\}\right)\rvert$	$=$	12
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(243),(142),(143),(12)(34)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(12)(34),(132),(124),(142)\}\right)\rvert$	$=$	12
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(143),(234),(124),(12)(34)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(243),(12)(34),(124),(142)\}\right)\rvert$	$=$	12
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(14)(23),(12)(34),(143),(142)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(134),(142),(234),(12)(34)\}\right)\rvert$	$=$	12
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(243),(142),(132),(12)(34)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(134),(234),(132),(12)(34)\}\right)\rvert$	$=$	12
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(134),(143),(243),(124)\}\right)\rvert$	$=$	6	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(243),(143),(132),(124)\}\right)\rvert$	$=$	12
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(142),(143),(234),(12)(34)\}\right)\rvert$	$=$	12	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(134),(143),(132),(243)\}\right)\rvert$	$=$	12
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(134),(143),(132),(142)\}\right)\rvert$	$=$	6	$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(142),(143),(234),(132)\}\right)\rvert$	$=$	12
$\lvert \mathrm{Orb}\left(\{(243),(143),(234),(142)\}\right)\rvert$	$=$	6			

Il existe au moins 1 orbite (précisément 1 dans ce cas) de cardinalité *non* divisible par 2 :

$$\mathrm{Orb}\left(\{(124),(143),(132),(234)\}\right) = \left\{ \begin{array}{rrrrr} \{ & (124), & (143), & (132), & (234)\}, \\ \{ & (13)(24), & (14)(23), & \varepsilon, & (12)(34)\}, \\ \{ & (142), & (243), & (134), & (123)\} \end{array} \right\}$$

Le stabilisateur de *tout* élément dans cette orbite est

$$\mathrm{Stab}\left(\{(143),(234),(124),(132)\}\right) = \left\{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\right\}$$

Ceci est un sous-groupe (normal) de A_4 d'ordre 4. (Il est l'unique sous-groupe d'ordre 4.)