Problème 1.

Soit G un groupe.

a. Soit H un sous-groupe normal de G tel que le groupe quotient G/H est monogène. Montrer qu'il existe un élément a de G tel que tout élément de G s'exprime sous la forme $a^k h$ avec $h \in H$ et $k \in \mathbb{Z}$.

b. Soit H un sous-groupe de G qui est contenu dans le centre de G. Montrer que si G/H est un groupe monogène, alors G est abélien.

c. Soient G un groupe d'ordre $2q$, où q est un nombre premier *impair*, et H un sous-groupe normal de G d'ordre 2. Montrer que G est un groupe abélien.

d. Montrer que le groupe G dans la partie (c) est monogène.

(Vous pouvez utiliser le résultat d'une partie précédente, même si vous ne l'avez pas résolu.)

Pour la petite histoire.
À isomorphisme près, il n'existe que deux groupes d'ordre $2q$, où q est un nombre premier impair. Ici vous allez montrer qu'un tel groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}/(2q)\mathbb{Z}$ s'il possède un sous-groupe normal d'ordre 2. Sinon, il est isomorphe au groupe d'isométries d'un polygone régulier à q côtés.