RÉCAPULATIF SUR LES THÉORÈMES DE SYLOW

Soit G un groupe fini et p un nombre premier. Écrivons $|G| = p^n m$, où p ne divise pas m.

Définition. Un *p–sous-groupe de Sylow de* G est un sous-groupe de G d'ordre p^n.

Premier Théorème de Sylow : G possède *au moins* un p–sous-groupe de Sylow.

Corollaires :

(1) G possède un sous-groupe d'order p^s pour tout s tel que p^s divise $|G|$.

(2) G possède au moins un élément d'ordre p (Théorème de Cauchy).

Deuxième Théorème de Sylow : Les p–sous-groupes de Sylow forment une seule orbite pour l'action par conjugaison de G sur ses sous-groupes.

Corollaires :

(1) Soit S et T des p–sous-groupes de Sylow de G. Il existe $g \in G$ tel que $T = gSg^{-1}$.

(2) Si S est un p–sous-groupe de Sylow, alors gSg^{-1} est aussi un p–sous-groupe de Sylow.

(3) Tout p–sous-groupe de G est contenu dans un p–sous-groupe de Sylow de G.

Troisième Théorème de Sylow : Soit n_p le nombre de p–sous-groupes de Sylow de G.

(i) n_p divise $|G|$; et

(ii) $n_p \equiv 1 \pmod p$.

Corollaires : Soit S un p–sous-groupe de Sylow de G.

(1) $n_p = |\operatorname{Orb}_G(S)| = [G : \operatorname{Stab}_G(S)]$, où G agit sur ses sous-groupes par conjugaison et $\operatorname{Stab}_G(S) = \{g \in G : gSg^{-1} = S\}$.

(2) G possède un seul p–sous-groupe de Sylow (autrement dit, $n_p = 1$)
ssi G possède un p–sous-groupe de Sylow qui soit un sous-groupe normal.

Algorithme. Pour trouver *tout* p–sous-groupes de Sylow de G :

(1) on fait agir G par multiplication à gauche sur ses parties de cardinalité p^n ;

(2) on choisit une seule orbite de cardinalité *non* divisible par p ; et

(3) on calcule le stabilisateur de chaque élément dans l'orbite.