Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}$ muni de l'opération $a * b = ab + a + b$.

a. Est-ce que $*$ est associative ?

b. Est-ce que $*$ est commutative ?

c. Est-ce que $(\mathbb{R}, *)$ possède un élément neutre ?

d. Lesquels des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ sont stables pour $*$?
- $\mathbb{N}$ (nombres naturels—y compris 0)
- $\mathbb{Q}^-$ (nombres rationnels negatifs)
- $\mathbb{Q}^{+*}$ (nombres rationnels positifs et non nul)
- $\mathbb{R}$ (nombres réels)
- $n\mathbb{Z}$ (multiplies entier de $n \in \mathbb{N}$)

Exercice 2. Soit $E = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ muni de l'opération $A \star B = AB + I_n$, oú I_n est la matrice identité $n \times n$. Est-ce que $*$ est associative ? Est-ce que $*$ est commutative ?

Exercice 3. Soient X un ensemble non vide et E l'ensemble de sous-ensembles de X. On définit une opération Δ, appelée « différence symétrique ? », sur les sous-ensembles de X : pour $A, B \in E$, on définit

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Montrer que (E, Δ) est associative. Est-elle commutative ?