Feuille d'exercices 10

Exercice 1. Soient G un groupe abélien et N un sous-groupe de G. Montrer que G/N est un groupe abélien.

Exercice 2. Si H et N sont deux sous-groupes de G et $N \triangleleft G$, montrer que $H \cap N \triangleleft H$.

Exercice 3. Soit H un sous-groupe d'ordre n d'un groupe G. Montrer que si H est le seul sous-groupe de G d'ordre n, alors H est un sous-groupe normal de G.

Exercice 4. Soit H un sous-groupe normal d'un groupe G. Si $[G : H] = m$, alors l'ordre de tout élément de G/H divise m.

Exercice 5. Soient H un sous-groupe normal d'un groupe G et $a \in G$. Montrer que l'ordre de aH dans G/H divise l'ordre de a dans G.

Exercice 6. Soient H un sous-groupe normal d'un groupe G et p un nombre premier. Si $[G : H] = p$, alors l'ordre de tout $a \notin H$ est un multiple de p.

Exercice 7. Montrer l'énoncé suivant par récurrence sur l'ordre du groupe G.

> Si G est un groupe abélien fini et si p est un nombre premier qui divise l'ordre de G, alors G possède un élément d'ordre p.

Exercice 8. Soit H un sous-groupe normal d'un groupe G. Montrer que $a^2 \in H$ pour tout $a \in G$ ssi tout élément de G/H est son propre inverse.

Exercice 9. Soient H un sous-groupe normal d'un groupe G et $m \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a^m \in H$ pour tout $a \in G$ ssi l'ordre de tout élément de G/H divise m.

Exercice 10. Soient H un sous-groupe normal d'un groupe G. Montrer que tout élément de G/H est d'ordre fini ssi pour tout élément a de G il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a^k \in H$.