Feuille d'exercices 11

Exercice 1. Soit G un groupe abélien et p un nombre premier. Soit H le sous-groupe de G constitué par les éléments d'ordre une puissance de p.

a. Montrer que H est un sous-groupe de G.

b. Montrer que G/H ne possède pas d'éléments dont l'ordre est une puissance non nulle de p.

Exercice 2. Soit H un sous-groupe normal de G. Montrer que si H est monogène, alors tout sous-groupe de H est un sous-groupe normal de G.

Exercice 3. Soit G un groupe. Le *commutateur* de deux éléments $g, h \in G$, noté $[g, h]$, est

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}.$$

Le *sous-groupe dérivé* de G, noté $[G, G]$, est le sous-groupe engendré par les commutateurs :

$$[G, G] = \langle [g, h] : g, h \in G \rangle$$

a. Montrer que G est abélien ssi son sous-groupe dérivé $[G, G]$ est trivial.

b. Montrer que le sous-groupe dérivé $[G, G]$ de G est un sous-groupe normal de G. (*Indication : exprimer* $g[x, y]g^{-1}$ *sous la forme* $[u, v]$.)

c. Montrer que le quotient $Ab(G) = G/[G, G]$, appelé l'*abélianisé* de G, est abélien.

d. Montrer que si H est un sous-groupe de G qui contient $[G, G]$, alors H est un sous-groupe normal de G et G/H est abélien.

e. Montrer que si H est un sous-groupe normal de G tel que G/H est abélien, alors $[G, G] \subseteq H$. (Autrement dit, $[G, G]$ est le plus petit sous-groupe K tel que G/K est abélien.)

f. Soit H et K deux sous-groupes normaux de G tel que $H \triangleleft K$. Montrer que si G/H est abélien, alors G/K et K/H sont abéliens.

g. Sachant que le groupe alterné A_n (le sous-groupe du groupe symétrique S_n des permutations paires) est engendré par les cycles de longueur 3, montrer que $[S_n, S_n] = A_n$.

h. En déduire qu'il y a exactement deux homomorphisme de S_n dans $\mathbb{C}^*$, pour $n \geq 2$.