Feuille d'exercices 12

Exercice 1. Soit G un groupe abélien, n un entier non nul et

$$G^{(n)} = \{x^n : x \in G\} \qquad \text{et} \qquad G_{(n)} = \{z \in G : z^n = e\}.$$

Montrer que $G/G_{(n)} \cong G^{(n)}$. *(Indice : premier théorème d'isomorphisme.)*

Exercice 2. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, on définit $\tau_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\tau_{a,b}(x) = ax + b$.

a. Montrer que

$$G = \{\tau_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$$

muni de la composition d'applications est un groupe.

b. Montrer que

$$N = \{\tau_{1,b} : b \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-groupe normal de G.

c. Montrer que G/N est isomorphe à $\mathbb{R}^*$. *(Indice : premier théorème d'isomorphisme.)*

Exercice 3. Soient $\mathbb{R}^*$ le groupe (multiplicatif) de nombres réels non nuls et $\mathbb{R}^+$ le groupe (multiplicatif) de nombres réels positifs. Montrer que $\mathbb{R}^*/\{1, -1\} \cong \mathbb{R}^+$.

(Indice : premier théorème d'isomorphisme.)

Exercice 4. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/Z \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\}$, où $Z = \{aI_2 : a \in \mathbb{C}^*\}$, et décrire explicitement l'isomorphisme.

(Indice : on prend $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $N = Z$ dans le deuxième théorème d'isomorphisme.)

Exercice 5. Soient G un groupe fini et $H \lhd G$ tel que $\mathrm{pgcd}(|H|, [G : H]) = 1$. Montrer que H est l'unique sous-groupe de G d'ordre $|H|$.

(Indice : deuxième théorème d'isomorphisme ou le théorème de correspondance.)

Exercice 6.

> *On dit qu'un sous-groupe normal H de G est un sous-groupe normal* maximal *de G si $H \neq G$ et si $H \leq K \leq G$ entraîne $K = H$ ou $K = G$.*

Montrer que $H \lhd G$ est un sous-groupe normal maximal de G ssi G/H ne possède pas de sous-groupe normal à part que G/H et $\{H\}$. *(Indice : théorème de correspondance.)*