Feuille d'exercices 13

Exercice 1.

a. Montrer que $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est un groupe monogène.

b. Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas un groupe monogène, et qu'il est engendré par les éléments $(1, 1)$ et $(1, 2)$.

Exercice 2. Soient $G_1, G_2, \dots, G_r$ des groupes. Montrer que si $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ appartient au produit direct $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_r$, alors

$$\operatorname{ordre}\big((x_1, x_2, \dots, x_r)\big) = \operatorname{ppcm}\Big(\operatorname{ordre}(x_1), \operatorname{ordre}(x_2), \dots, \operatorname{ordre}(x_r)\Big).$$

Exercice 3. Soit G un groupe abélien fini.

a. Si $x, y \in G$ tels que $\operatorname{pgcd}(\operatorname{ordre}(x), \operatorname{ordre}(y)) = 1$, alors $\operatorname{ordre}(xy) = \operatorname{ordre}(x)\operatorname{ordre}(y)$.

(Indication : si $(xy)^m = e$, alors $x^m = y^m \in \langle x\rangle \cap \langle y\rangle$.)

b. En général, si $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ tels que $\operatorname{ordre}(a_1), \operatorname{ordre}(a_2), \dots, \operatorname{ordre}(a_n)$ sont premiers deux-à-deux, alors

$$\operatorname{ordre}(a_1 a_2 \cdots a_n) = \operatorname{ordre}(a_1)\operatorname{ordre}(a_2)\cdots\operatorname{ordre}(a_n).$$

c. Si $x, y \in G$, alors $\operatorname{ordre}(xy)$ divise $\operatorname{ppcm}(\operatorname{ordre}(x), \operatorname{ordre}(y))$.

d. Donner un exemple d'un groupe abélien fini G et deux éléments $x, y \in G$ tels que $\operatorname{ordre}(xy) \neq \operatorname{ppcm}(\operatorname{ordre}(x), \operatorname{ordre}(y))$.

Exercice 4. Soient G et H deux groupes dont tout élément est son propre inverse. Montrer que tout élément de $G \times H$ est son propre inverse.

Exercice 5. Soient G et H des groupes abéliens. Montrer que $G \times H$ est abélien.

Exercice 6. Soient G et H des groupes. Montrer que $G \times H \cong H \times G$.

Exercice 7. Soient H et K deux sous-groupe d'un groupe G. Montrer que si K est un sous-groupe normal de G, alors $HK = KH$ et HK est un sous-groupe de G.

Exercice 8. Soient H et K deux sous-groupes normaux d'un groupe G. Montrer que G est isomorphe au produit direct (externe) $H \times K$ ssi tout élément $a \in G$ admet une unique expression sous la forme $a = hk$ avec $h \in H$ et $k \in K$.

Exercice 9. Soient $f : G \to G'$ et $g : H \to H'$ des homomorphismes de groupes.

a. Montrer que l'application $h : G \times G' \to H \times H'$ défini par $h(a,b) = (f(a), g(b))$ est un homomorphisme de groupes.

b. Calculer le noyau et l'image de h.

c. En déduire que si f et g sont des isomorphismes, alors h est un isomorphisme.

Exercice 10. Soient G et H deux groupes. Déterminer les éléments $h \in H$ qui font de l'application $i_h : G \to G \times H$ définie par $i_h(g) = (g,h)$ un homomorphisme de groupes. Déterminer le noyau et l'image de ce homomorphisme.

Exercice 11. Soient G un groupe, H un sous-groupe normal de G et $f : G \to H$ un homomorphisme tel que $f(h) = h$ pour tout $h \in H$.

a. Montrer que $xf(x^{-1}) \in \ker(f)$ pour tout $x \in G$.

b. Montrer que G est produit direct interne de $\ker(f)$ et H.

Exercice 12. *(Lemme de Zassenhaus)* Soient H et K deux groupes, $H' \triangleleft H$ et $K' \triangleleft K$.

a. Montrer que $H'(H \cap K')$ est un sous-groupe normal de $H'(H \cap K)$.

b. Montrer que $K'(K \cap H')$ est un sous-groupe normal de $K'(K \cap H)$.

c. Montrer que l'on a un isomorphise de groupes quotients :

$$H'(H \cap K) \Big/ H'(H \cap K') \cong K'(H \cap K) \Big/ K'(H' \cap K)$$

Exercice 13. Soit $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Si p est un nombre premier, on définit

$$G(p) = \{g \in G : \text{ordre}(g) \text{ est une puissance de } p\}.$$

a. Calculer $G(2)$ et $G(3)$.

b. Décomposer $G(2)$ en produit directe *interne* de deux sous-groupes H et K.

c. En déduire que $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 14 ! Soit $G \cong H \times K$ le produit direct interne de sous-groupes H et K de G. Soit N un sous-groupe normal de G. Montrer que N est abélien ou $H \cap N \neq \{e\}$ ou $K \cap N \neq \{e\}$.

Exercice 15 ! Donner un exemple d'un groupe $H \times K$ qui contient un sous-groupe normal N tel que $H \cap N = \{e\}$ et $K \cap N = \{e\}$. En déduire que si $N \triangleleft H \times K$, alors il est possible que $N \neq (N \cap H) \times (N \cap K)$.