Feuille d'exercices 14

Exercice 1. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X, $g \in G$ et $x, x' \in X$.

a. Montrer que si $x' = g \cdot x$, alors $x = g^{-1} \cdot x'$.

b. Montrer que si $x \neq x'$, alors $g \cdot x \neq g \cdot x'$.

Exercice 2. Soit H le sous-groupe de S_4 engendré par les transpositions $(1, 2)$ et $(3, 4)$. On fait agir H sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. Déterminer les orbites et les stabilisateurs pour cette action.

Exercice 3. Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe fini G. On définit, pour tout $(h, k) \in H \times K$ et pour tout $x \in HK$,

$$(h, k) \bullet x = hxk^{-1}$$

Montrer que ceci est une action de $H \times K$ sur HK.

Exercice 4. On fait agir S_4 sur les sous-groupe de S_4 d'ordre 4 par conjugaison. Explicitement, si H est un sous-groupe de S_4 et $\sigma \in S_4$, alors

$$\sigma \cdot H = \left\{ \sigma h \sigma^{-1} : h \in H \right\}.$$

a. Montrer que

$$\{\varepsilon, (1, 2, 3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4, 3, 2)\} \quad \text{et} \quad \{\varepsilon, (2, 1, 3, 4), (2, 3)(1, 4), (2, 4, 3, 1)\}$$

appartiennent à la même orbite $\mathcal{O}$.

b. Est-ce que $\{\varepsilon, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$ appartient à l'orbite $\mathcal{O}$ de la partie précédente ?

Exercice 5. Soit G un groupe. Montrer que la cardinalité de toute classe de conjugaison de G divise l'ordre de G.

(Indication : On fait G agir sur lui-même par conjugaison.)

Exercice 6. Soit G un groupe agissant sur un ensemble E.

a. Montrer que pour tout $x \in E$ et pour tout $g \in G$ on a

$$g \, \mathrm{Stab}_G(x) \, g^{-1} = \mathrm{Stab}_G(g \cdot x).$$

b. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que pour tout $x \in E$ et pour tout $g \in G$ on a

$$g \, \mathrm{Stab}_H(x) \, g^{-1} = \mathrm{Stab}_{gHg^{-1}}(g \cdot x).$$

Exercice 7. Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. Montrer que pour tous $x, y \in E$, si $\mathrm{Orb}_G(x) = \mathrm{Orb}_G(y)$, alors $\mathrm{Stab}_G(x)$ et $\mathrm{Stab}_G(y)$ sont des sous-groupes conjugués.

Exercice 8. Soit G un groupe fini d'ordre 21 agissant sur un ensemble E.

a. Quels sont les cardinaux possibles des orbites pour cette action ?

b. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note n_i le nombre d'orbites à i éléments. Montrer que

$$|E| = n_1 + 3n_3 + 7n_7 + 21n_{21}.$$

c. On suppose que $|E| = 11$. Montrer qu'il y a au moins un point fixe pour l'action de G sur E.

d. On suppose que $|E| = 19$ et qu'il n'y a pas de point fixe pour l'action de G sur E. Calculer le nombre d'orbites dans E sous l'action de G.

Exercice 9. Soient G un groupe fini non trivial dont l'élément neutre est noté e, p un nombre premier quelconque et

$$E = \{(g_1, g_2, \ldots, g_p) : g_1, g_2, \ldots, g_p \in G \text{ et } g_1 g_2 \cdots g_p = e\}.$$

a. Montrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agit sur E par

$$\bar{1} \bullet (g_1, g_2, g_3, \ldots, g_p) = (g_2, g_3, \ldots, g_p, g_1).$$

b. Montrer que l'ensemble de points fixes pour l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur E est

$$\{\underbrace{(g, g, \ldots, g)}_{p} : g \in G \text{ et } g^p = e\}.$$

c. Montrer que la cardinalité de E est $|G|^{p-1}$.

d. En déduire que

$$|G|^{p-1} \equiv |\{g \in G : g^p = e\}| \pmod{p}. \tag{1}$$

Exercice 10. Déduire le *théorème de Cauchy* à partir (1).

Théorème de Cauchy : Si G est un groupe fini non trivial et p est un nombre premier qui divise $|G|$, alors il existe un élément d'ordre p dans G.

Exercice 11. Déduire à partir de (1) (avec $G = S_p$, le groupe symétrique) :

Théorème de Wilson : Si p est un nombre premier, alors $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Exercice 12 ! Soit G un groupe fini non trivial dont l'élément neutre est noté e et tel que pour tous $a, b \in G$ différent de e, il existe un élément c de G tel que $a = cbc^{-1}$.

a. Montrer que si $a, b \in G$ sont tels que $a \neq e$ et $b \neq e$, alors a et b sont du même ordre.

b. Montrer que G possède deux classes de conjugaison.

c. En déduire que G est un p-groupe, où p est un nombre premier. (*Théorème de Cauchy*)

d. En déduire que G est un groupe d'ordre 2.