Feuille d'exercices 2

Exercice 1. Soit R le rectangle situé dans $\mathbb{R}^2$ à sommets $(2,1)$, $(2,-1)$, $(-2,-1)$ et $(-2,1)$. Soit E l'ensemble des isomètries de R.

a. Dresser la table de $(E, \circ)$.

b. Montrer que $(E, \circ)$ est un groupe.

c. Dresser la table de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.

d. Comparer les deux tables.

Exercice 2. Montrer que l'ensemble

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{C} \right\}$$

muni de la multiplication des matrices est un groupe.

Exercice 3. Soit $H = \{2^k : k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $(H, \times)$ est un groupe.

Exercice 4. Soient X un ensemble, $f : X \to X$ une bijection et $G = \{f^k : k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe.

Exercice 5. Pour chaque énoncé, déterminer s'il est vrai ou faux. S'il est vrai, donner une démonstration. S'il est faux, donner un contre-exemple. *(Indice : consultez les tables de multiplication calculées en classe pour trouver des contre-exemples.)*

a. Si $x^2 = e$, alors $x = e$.

b. Si $x^2 = a^2$, alors $x = a$.

c. Pour tous $a, b \in G$, on a $(ab)^2 = a^2 b^2$.

d. Si $x^2 = x$, alors $x = e$.

e. Pour tout $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $x = y^2$.

f. Pour tous $x, y \in G$, il existe un élément $z \in G$ tel que $y = xz$.

Exercice 6. Soit G un groupe. On suppose que pour tout $x \in G$ on a $x^2 = e$. Montrer que G est un groupe abélien.

Exercice 7. Soit G un groupe et soit $a, b \in G$ tel que $a^5 = e$ et $a^3 b = b a^3$.

a. Montrer que $a^6 b = b a^6$.

b. En déduire que $ab = ba$.

Exercice 8. Soit E un ensemble muni d'une opération $*$. Pour un élément $a \in E$, on pose

$$\mathcal{C}(a) = \{x \in E : a * x = x * a\}.$$

a. Montrer que si $(E, *)$ possède un élément neutre e, alors e appartient à $\mathcal{C}(a)$.

b. Montrer que si $*$ est commutative dans $(E, *)$, alors $\mathcal{C}(a) = E$ pour tout $a \in E$.

c. Montrer que si $*$ est associative dans $(E, *)$, alors $\mathcal{C}(a)$ est stable pour $*$.