Feuille d'exercices 3

Groupes et opérations

Exercice 1. Soit G un groupe tel que $(xy)^2 = x^2y^2$ pour tous $x, y \in G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 2. Soit G un groupe tel que $g = g^{-1}$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 3. Soit G le produit cartesien d'ensembles $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{Z}$. On définit une opération sur G par

$$(a, m) * (b, n) = (ab, m + n)$$

où $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $m, n \in \mathbb{N}$. Montrer que G muni de l'opération $*$ est un groupe.

Exercice 4. Soit G un groupe qui contient un nombre pair d'éléments. Montrer qu'il existe un élément $g \in G$ tel que $g^2 = 1$ et $g \neq 1$.

Exercice 5. Soient E un ensemble et $*$ une opération sur E telle que $(a * b) * a = b$ pour tous $a, b \in E$. Montrer que $a * (b * a) = b$ pour tous $a, b \in E$.

Exercice 6. Soit $*$ une opération associative et commutative sur un ensemble E. Supposons que pour tous $x, y \in E$, il existe $z \in E$ tel que $x * z = y$. Montrer que $(E, *)$ est un groupe.

Groupes symétriques

Exercice 7. Calculer les produits suivants dans le groupe symétrique S_8. Exprimer les résultats en utilisant la notation à deux lignes.

a. $(3, 5, 2)(6, 7, 1, 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & \cdots \end{pmatrix}$

b. $(3, 5, 2)(6, 3, 1, 5)(2, 7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & \cdots \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 8 & 5 & 2 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 4 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & \cdots \end{pmatrix}$

Exercice 8. Considérons les trois permutations suivantes de S_7 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 7 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \gamma = (1, 3, 7, 4, 2, 6)$$

a. Calculer σ^{-1}, τ^{-1}, γ^{-1}.

b. Écrire σ, τ et γ comme produits de cycles disjoints.

c. Écrire σ, τ et γ comme produits de transpositions.

d. Écrire σ, τ et γ comme produits de transpositions adjacentes.

e. Déterminer si σ, τ et γ sont des permutations paires ou impaires.

Exercice 9.

a. Montrer que le produit de deux permutations paires est une permutation paire.

b. Montrer que le produit de deux permutations impaires est une permutation paire.

c. Montrer que le produit d'une permutation paire et d'une permutation impaire est une permutation impaire.

Exercice 10. Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ un p-cycle.

a. Montrer que $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ est une permutation paire si p est impair.

b. Montrer que $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ est une permutation impaire si p est pair.

Exercice 11. Montrer que toute permutation de S_n se décompose en produit des permutations suivantes :

a. $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, …, $(1, n)$. (*Indice :* $(a_1, a_2, \ldots, a_p) = (a_1, a_p)(a_1, a_{p-1}) \cdots (a_1, a_2)$.)

b. $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, …, $(n-1, n)$. (*Indice :* $(3, 4) = (1, 3)(1, 4)(1, 3)^{-1}$.)

c. $(1, 2)$, $(1, 2, 3, \ldots, n)$.

d. $(1, 2)$, $(2, 3, \ldots, n)$.