Feuille d'exercices 4

Sous-groupes et ordres des éléments

Exercice 1. Soient A, B et C les parties suivantes du groupe symétrique S_4 :

$$\begin{aligned} A &= \{\sigma \in S_4 : \sigma(1) = 3\} \\ B &= \{\sigma \in S_4 : \sigma(2) = 2\} \\ C &= \{\sigma \in S_4 : \sigma(1) = 3 \text{ et } \sigma(2) = 2\}\,. \end{aligned}$$

Déterminer si A, B et C sont sous-groupes de S_4.

Exercice 2. Soient a et b les matrices suivantes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que $\text{ordre}(a) = 4$ et $\text{ordre}(b) = 3$.

b. Montrer que $\text{ordre}(ab) = \infty$. En déduire que le sous-groupe $H = \langle\{a, b\}\rangle$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ est d'ordre infini.

Exercice 3. Soit H l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)$ et soit K l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

a. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

b. Montrer que K est un sous-groupe H.

c. Déterminer les éléments de H d'ordre 2.

d. Trouver deux éléments A et B de H d'ordre 2 et tels que l'ordre de AB est infini.

e. Montrer que K est isomorphe à $\mathbb{R}$ muni de l'addition.

Exercice 4. Soient G un groupe et a un élément de G.

a. Montrer que si $a^k = e$, alors $\text{ordre}(a)$ divise k.
(Rappel : $\text{ordre}(a)$ *est le plus petit entier* $n > 0$ *tel que* $a^n = e$*.)*

b. Supposons que G est un groupe *abélien fini*. Montrer que $a^{|G|} = e$ et en déduire que $\text{ordre}(a)$ divise l'ordre de G, si G est un groupe abélien fini.

Groupes d'ordre 8

Exercice 5. Soit X l'ensemble des nombres réels $x \neq 0, 1, 2$. Soit R_4 le groupe engendré par les applications $f(x) = 2 - x$ et $g(x) = 2/x$. Calculer l'ordre de R_4 ainsi que sa table de multiplication.

Exercice 6. Soit I et J les deux matrices suivantes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Dresser la table du sous-groupe $Q = \langle \{I, J\} \rangle$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

b. Calculer l'ordre de tout élément de Q.

c. Calculer les sous-groupes de Q.

d. Calculer le centre[1] de Q.

e. Existe-t-il un élément $a \in Q$ tel que $Q = \langle a \rangle$?

Exercice 7. Soit D_4 le groupe diédral du carré.

a. Écrivez tous les éléments de D_4 comme des permutations des sommets du carré.

b. Dresser la table de multiplication de D_4.

c. Calculer l'ordre de D_4.

d. Calculer l'ordre de tout élément de D_4.

e. Calculer les sous-groupes de D_4.

f. Calculer le centre[1] de D_4.

g. Existe-t-il un élément $a \in D_4$ tel que $D_4 = \langle a \rangle$?

Exercice 8. Existe-t-il un isomorphisme entre les groupes Q et D_4 ? entre Q et R_4 ? entre D_4 et R_4 ?

1. Le *centre* d'un groupe G est $Z(G) = \{g \in G : xg = gx \text{ pour tout } x \in G\}$. Il est un sous-groupe de G.