Feuille d'exercices 5

Exercice 1. Soit a un élément d'ordre 12 dans un groupe G.

a. Trouver le plus petit entier positif k tel que $a^{8k} = e$.

b. Déterminer l'ordre de a^8, a^9, a^{10}, a^5.

c. Trouver tous les entier j tels que $\text{ordre}(a^j) = \text{ordre}(a)$.

d. Généraliser les exercices précédents. C'est-à-dire, soit b un élément d'order m dans un groupe G' : déterminer l'ordre de b^k ; et trouver tous les entier j tels que $\text{ordre}(b^j) = m$.

Exercice 2.

a. Montrer que $\mathbb{Q}$, muni de l'addition, n'est pas un groupe monogène.

b. Montrer que $\mathbb{R}$, muni de l'addition, n'est pas un groupe monogène.

c. Montrer que $\mathbb{R}^*$, muni de la multiplication, n'est pas un groupe monogène.

Exercice 3.

a. Montrer que les groupes $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$ ne sont pas isomorphes.

b. Montrer que les groupes $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas isomorphes.

c. Montrer que les groupes $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 4. Montrer que l'application exponentielle $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_{>0}$ est un isomorphisme de groupes, où $\mathbb{R}^*_{>0}$ est l'ensemble de nombres réels strictement postitifs muni de la multiplication de nombres réels.

Exercice 5. Montrer que l'application f donnée est un homomorphisme.

a. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = 1/x$.

b. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(z) = |z|$.

c. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ définie par $f(x) = \cos(x) + i\sin(x)$.

Exercice 6. Montrer que le groupe symétrique S_3 est isomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Exercice 7. Montrer que si $f : G \to H$ est un homomorphisme de groupes injectif et si H est abélien, alors G est abélien.

Exercice 8. Soient $f : G \to G'$ un homomorphisme de groupes et H un sous-groupe de G'. Montrer que l'ensemble $f^{-1}(H) = \{a \in G : f(a) \in H\}$ est un sous-groupe de G.

Exercice 9. Soient $f : G \to G'$ et $g : G' \to G''$ deux homomorphismes de groupes.

a. Montrer que la composition $g \circ f$ est un homomorphisme de groupes de G dans G''.

b. En déduire que l'ensemble de homomorphismes de groupes de G dans G est un monoide.

c. En déduire que l'ensemble d'automorphismes[1] de G est un groupe.

Exercice 10. Pour $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ on pose $f_\alpha : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ l'application définie par

$$f_\alpha(x) = \alpha x$$

pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

a. Montrer que f_α est un automorphisme de $\mathbb{Q}$.

b. Montrer que l'application $\alpha \mapsto f_\alpha$ est un isomorphisme de $\mathbb{Q}^*$ vers le groupe d'automorphismes de $\mathbb{Q}$.

c. Trouver tous les automorphismes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.

d. ! Trouver tous les automorphismes du groupe $(\mathbb{Q}, +)$.

Exercice 11 ! Soient D un groupe d'ordre $2n$, où n est impair, et H un sous-groupe de G d'ordre n tel que $xhx^{-1} = h^{-1}$ pour tout $h \in H$ et tout $x \in D \setminus H$. Montrer que H est abélien et que tout élément de $D \setminus H$ est d'ordre 2.

1. Un *automorphisme* d'un groupe G est un *iso*morphisme de G dans G.